Programme de colle Déterminants et Systèmes linéaires

Classe de PT

Lycée La Martinière

Exercice 1
Soit A, B et C des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & A+C-B \end{pmatrix} = \det(A+C)\det(A-B)$$

Exercice 2 (2011, ENSAM — OT 244)

Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 3
Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & & \\ 3 & 3 & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ n & & \cdots & & n \end{vmatrix}$.

Exercice 4 (OT 237 — 2011 PT)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer $\det\begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ en fonction de $\det A$ et a, b, c, d.

Exercice 5
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.

1) Montrer que J est inversible.

2) Calculer AJ, en déduire $\det(AJ)$ puis $\det(A)$.

Exercice 6
On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}JP = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

En déduire $\det(\alpha I_n + \beta J)$.

Exercice 7

1) Calculer le déterminant de la matrice M ayant des a au-dessus de la diagonale, des b en dessous, et des coefficients diagonaux quelconque $(x_1, \dots, x_n)$. Dans un premier temps on fera le calcul lorsque $a \neq b$.

2) Calculer le déterminant de $|(\dfrac{1}{a_i + b_j})|$.

Solution.

1) Un classique : il faut poser $P(X) = M - X\,(1)$, où (1) est la matrice n'ayant que des 1 comme coefficients. En soustrayant la première colonne à toutes les colonnes, puis en regardant ce que donnerait un développement par rapport à la première colonne (sans faire les calculs explicites bien sûr !), on constate que $P(X)$ est de degré au plus 1. Il suffit donc de calculer $P(a)$ et $P(b)$ pour déterminer les coefficients de P, et en particulier $P(0)$.

2) Remplacer b_n par X, etc... un peu sur le modèle de ci-dessus.

□

Exercice 8
$M \in GL_n(\mathbb{Z}) \Longleftrightarrow \det(M) \in \mathbb{Z}^\times$

Exercice 9 (ddl)
Résoudre le système d'équations suivant d'inconnues complexes :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 0\\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0\\
 & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0\\
 & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & \vdots\\
 & & & & x_{n-2} & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 0\\
 & & & & & & x_{n-1} & + & x_n & = & 0
\end{array}\right.$$

Exercice 10 (ddl)
Discuter suivant a et b et résoudre

$$\begin{cases} ax + 2by + 2z = 1 \\ 2x + aby + 2z = b \\ 2x + 2by + az = 1 \end{cases}$$