

Programme de colle Courbes

Classe de PT

Lycée La Martinière

Exercice 1 (PT C 2010 partie C / E3A PSI 2011)

Le plan euclidien étant rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la courbe Γ dont les équations paramétriques sont

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{t-t^3}{1+t^2}$$

- 1) Étude et tracé de Γ .
 - a) Donner une interprétation géométrique du paramètre réel t . On pourra essayer de relier x , y et t .
 - b) Montrer que Γ possède un axe de symétrie que l'on précisera.
 - c) Dresser le tableau des variations des fonctions x et y .
 - d) Donner l'équation de l'asymptote de Γ .
 - e) Calculer les coordonnées des points où la tangente à Γ est verticale ou horizontale.
 - f) Montrer que Γ possède un point double que l'on précisera (c'est-à-dire un point du plan correspondant à deux valeurs du paramètre t).
 - g) Quel angle forment les tangentes à Γ au point double?
 - h) Tracer Γ .
- 2) Former une équation cartésienne de Γ . (Indication : On pourra utiliser 1a.) (remarque : une telle équation de degré 3 définit une courbe dite cubique, qui sont des courbes fort intéressantes)
- 3) Donner un paramétrage en polaire de Γ .
- 4) (5/2) Calculer l'aire de la boucle formée par Γ .
- 5) On considère la droite Δ d'équation $ux + vy + w = 0$.
 - a) Montrer que le point $M \in \Gamma$ de paramètre t appartient à Δ si et seulement si
$$vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w) = 0$$
 - b) En notant t_1, t_2 et t_3 les racines de cette équation et en utilisant
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w) = v(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)$$
donner la valeur de $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1$.
 - c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que trois points de Γ , de paramètres t_1, t_2 et t_3 soient alignés.
- 6) Soit le point $A(1,0)$ de Γ . Une droite issue de A recoupe Γ en deux points M_1 et M_2 de paramètres respectifs t_1 et t_2 .
 - a) Quel est le paramètre du point A ?
 - b) Quelle relation vérifient t_1 et t_2 ?
 - c) Que peut-on dire des droites (OM_1) et (OM_2) ?
 - d) Montrer que le cercle de diamètre $[M_1M_2]$ est tangent à l'axe Ox .
- 7) Soit S un point de paramètre t_0 .
 - a) Quelle est l'équation qui donne les paramètres des points de contact M' et M'' des tangentes à Γ issues de S ? À quelle condition sur t_0 ces points existent-ils?

- b) La droite $(M'M'')$ recoupe Γ au point P . Quelle est, en fonction de t_0 , le paramètre du point P ?
- c) Que peut-on dire des droites (OP) et $(M'M'')$?

Solution.

- 1) a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = tx(t)$. Donc Le paramètre t représente la pente de la droite $(OM(t))$.
- b) Le changement de t en $-t$ change (x, y) en $(x, -y)$. Par conséquent Γ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
- c) Les fonctions x et y sont \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , car les dénominateurs des fractions rationnelles ne s'annulent pas. On restreint l'étude à $[0, +\infty[$.

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x'(t) = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2}$$

Le numérateur de $y'(t)$ est bicarré et se factorise en

$$1 - 4t^2 - t^4 = -(t^2 + 2 + \sqrt{5})(t^2 + 2 - \sqrt{5}) = -(t^2 + 2 + \sqrt{5})(t - t_0)(t + t_0)$$

où $t_0 = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$. Le tableau de variation est donc le suivant :

- $x(t_0) = \frac{1 - (\sqrt{5} - 2)}{1 + \sqrt{5} - 2} = \frac{(3 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})}{5 - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$
- $y(t_0) = t_0 x(t_0)$

t	0	t_0	$+\infty$
$x'(t)$	0	-	-
x	1	↘ -1	
$y'(t)$	+	0	-
y	0	$y(t_0)$	↘ $-\infty$

- d) Lorsque t tend vers $+\infty$, y tend vers $-\infty$ et x tend vers -1 . C'est la seule limite infinie. Donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à Γ pour $y \rightarrow \pm\infty$.
- e) Tous les points sont réguliers, donc la tangente est horizontale lorsque $y'(t) = 0$, c'est-à-dire $t = \pm t_0$, ce qui correspond au point de coordonnées $(x(t_0), y(t_0))$ et à son symétrique par rapport à (Ox) .
De même, la tangente est verticale pour $x'(t) = 0$, c'est-à-dire $t = 0$, qui correspond à $(1, 0)$.
- f) On cherche t_1 et t_2 tels que $t_1 \neq t_2$, $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$. Si on complète le tableau de variations de x , on constate que $x(t_1) = x(t_2)$ implique $t_2 = -t_1$ (et $t_1 \neq t_2$ équivaut à $t_1 \neq 0$). Cherchons $t_1 > 0$ tel que $y(t_1) = y(-t_1)$, c'est-à-dire

$$y(t_1) = \frac{t_1 - t_1^3}{1 + t_1^2} = \frac{-t_1 + t_1^3}{1 + t_1^2} = y(-t_1)$$

Ainsi, en résolvant, $2t_1(1 - t_1^2) = 2t_1(1 - t_1)(1 + t_1) = 0$, c'est-à-dire $t_1 = 1$.

La courbe Γ possède un unique point double en $(0, 0)$.

- g) D'après 1)c), $\left\{ \begin{array}{l} x'(1) = -\frac{4}{2^2} = -1 \\ y'(1) = \frac{1-4-1}{2^2} = -1 \end{array} \right.$ et par symétrie $\left\{ \begin{array}{l} x'(-1) = 1 \\ y'(-1) = -1 \end{array} \right.$

Comme le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul, donc les tangentes à Γ au point double forment un angle droit.

h) Tracer Γ .

2) Raisonnons par double inclusion.

Si $M(x, y) \in \Gamma$, alors $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = \frac{t-t^3}{1+t^2}$, donc $y = tx$. En particulier, lorsque $x \neq 0$, $t = \frac{y}{x}$. En remplaçant dans l'expression de x on obtient $x = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, puis en multipliant par $x^2 + y^2$ il vient

$$(E) \quad \boxed{x^3 + xy^2 - x^2 + y^2 = 0}$$

On avait exclu les points d'abscisse nulle, c'est-à-dire le point $(0, 0)$, or $(x, y) = (0, 0)$ vérifie bien (E). On a donc $\Gamma \subset \Gamma_{(E)}$.

Réciproquement, soit $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient (E). Pour $x \neq 0$, posons $t = \frac{y}{x}$.

Comme (E) équivaut à $x = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, on trouve

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad y = tx = \frac{t-t^3}{1+t^2}$$

c'est-à-dire $M \in \Gamma$. De plus $x = 0$ implique $y = 0$, d'après (E); qui est dans Γ (par exemple pour $t = 1$). Ainsi $\Gamma_{(E)} \subset \Gamma$.

Conclusion : par double inclusion, (E) : $x^3 + xy^2 - x^2 + y^2 = 0$ est une équation cartésienne de Γ .

(remarque : une telle équation de degré 3 définit une courbe dite cubique, qui sont des courbes fort intéressantes)

3) a) Les coordonnées de $M \in \Gamma$ vérifient $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $y = \frac{t-t^3}{1+t^2}$. L'équation de Δ s'écrit donc

$$u \frac{1-t^2}{1+t^2} + v \frac{t-t^3}{1+t^2} + w = 0$$

En multipliant par $-(1+t^2) \neq 0$ il vient $\boxed{vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w) = 0}$

b) On utilise les relations entre coefficients et racines. Id est, si on développe le membre de droite (avec les racines) et qu'on identifie les coefficients de chaque côté, on obtient

$$\begin{cases} v = v & \text{(coefficient devant } t^3) \\ u-w = -v(t_1+t_2+t_3) & \text{(coefficient devant } t^2) \\ -v = v(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1) & \text{(coefficient devant } t^1 = t) \\ -(u+w) = -vt_1t_2t_3 & \text{(coefficient devant } t^0 = 1) \end{cases}$$

Donc lorsque $v \neq 0$, il vient $\boxed{t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1}$

c) Trois points sont alignés si et seulement si ils sont sur une même droite, c'est-à-dire, s'ils vérifient une même équation $ux + vy + w = 0$. Supposons ces points sur Γ .

D'après le tableau de variations, la droite ne peut être verticale, donc $v \neq 0$. D'après 5)a) et 5)b), dans ce cas, $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1$.

Réciproquement, supposons que $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1$. Considérons la droite $\Delta = (M(t_1)M(t_2))$, et notons $ux + vy + w = 0$ son équation.

Par définition, $M(t_1) \in \Delta$ et $M(t_2) \in \Delta$, donc t_1 et t_2 sont des racines de l'équation trouvée au 5)a). En notant τ la troisième racine (nécessairement réelle puisque les deux précédentes le sont), le 5)b) nous dit que $t_1t_2 + t_2\tau + \tau t_1 = -1$. Par construction, $M(\tau)$ est sur $\Delta = (M(t_1)M(t_2))$.

Il nous reste à prouver que le point $M(\tau)$ est confondu avec $M(t_3)$. La différence des deux équations

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1 \quad \text{et} \quad t_1t_2 + t_2\tau + \tau t_1 = -1$$

nous donne $(t_3 - \tau)(t_1 + t_2) = 0$. Si $t_1 = -t_2$, alors $M(t_1)$ est le symétrique de $M(t_2)$ par rapport à (Ox) , et la droite $\Delta = (M(t_1)M(t_2))$ est verticale, ce qui est exclu. Donc la seule possibilité est que $\tau = t_3$, et donc $M(t_3) \in \Delta = (M(t_1)M(t_2))$.

Conclusion : $\boxed{t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que trois points de Γ , de paramètres t_1 , t_2 et t_3 soient alignés.

- 4) a) $x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$ entraîne $1-t^2 = 1+t^2$ puis $t = 0$. Donc A est de paramètre $t = 0$.
- b) D'après 5)b), $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1$, avec $t_3 = 0$, donc $t_1t_2 = -1$
- c) D'après 1)a), la droite (OM_1) a pour pente t_1 et la droite (OM_2) pour pente t_2 . Or d'après 6)b), $t_1t_2 = -1$. Donc les droites (OM_1) et (OM_2) sont perpendiculaires
- d) Le triangle OM_1M_2 est rectangle en O , donc O est sur le cercle de diamètre $[M_1M_2]$. Il reste à montrer que l'axe (Ox) est tangent.
- Si on note Ω le centre du cercle, milieu du segment $[M_1M_2]$, l'axe (Ox) est tangent si (Ox) est perpendiculaire à (ΩO) , c'est à dire si $\Omega \in (Oy)$. La condition analytique est donc $x(t_1) + x(t_2) = 0$, elle s'écrit $t_1^2t_2^2 = 1$ après calculs. Ce qui est vrai d'après 6)b).
- Ainsi, Le cercle de diamètre $[M_1M_2]$ est tangent à l'axe (Ox) .
- 5) a) La droite Δ passe par $S(t_0)$ et $M(t)$ (point double : elle y est tangente à Γ) si et seulement si $2t_0t + t^2 = -1$ (5)c). L'équation cherchée est donc

$$t^2 + 2t_0t + 1 = 0$$

Cette équation a deux solutions réelles distinctes si et seulement si $\Delta = 4t_0^2 - 4 > 0$ c'est-à-dire

$$t_0 \notin [-1, 1]$$

Donc pour S hors de la boucle.

- b) Le point $P(t)$ vérifie, d'après 5)b), $t't'' + tt' + tt'' = -1$. Or t' et t'' sont les racines de $t^2 + 2t_0t + 1 = 0$: leur somme vaut $-2t_0$ et leur produit 1. Ainsi, en remplaçant, il vient

$$1 - 2t_0t = -1$$

En résolvant, on trouve $t = 1/t_0$.

- c) D'après 7)a), on vu que $t't'' = 1$ donc $t'' = 1/t'$. Ainsi $x(t'') = -x(t')$ et $y(t'') = t''x(t'') = -t''x(t')$. La droite $(M'M'')$ a pour pente $\frac{y(t'') - y(t')}{x(t'') - x(t')} = \frac{-t'' - t'}{-2} = \frac{1}{2}(t'' + t') = -t_0$ d'après les relations coefficients racines.

Or, d'après 1)a) et 7)b), la droite $(OM(t))$ a pour pente $t = 1/t_0$.

Conclusion : Les droites (OP) et $(M'M'')$ sont perpendiculaires.

□

Exercice 2

Un point M parcourt le cercle de diamètre OA . Soit P la projection de M sur OA et Q le symétrique de A par rapport à P .

Déterminer le lieu du point N projection de O sur la droite MQ .

Exercice 3 (E3A PC 2012)

Le plan \mathcal{P} est rapporté au repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit \mathcal{D} la courbe d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) &= 3 - 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) &= 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

- Symétries. Points singuliers, allure au voisinage des points singuliers (tangentes, position). Montrer que les tangentes aux points singuliers passent par $\Omega = (3, 0)$.
- Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 les cercles de centre Ω et de rayons respectifs $R_1 = 3$ et $R_2 = 1$. Déterminer $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{D}$. Montrer que \mathcal{D} est tangente à \mathcal{C}_2 .
- Tracer dans \mathcal{P} les courbes \mathcal{D} , \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et T .

- 4) Montrer que la courbe \mathcal{D} est invariante par la rotation de centre Ω et d'angles $\frac{2\pi}{3}$.
- 5) Calculer la longueur de \mathcal{D} .

Exercice 4

Déterminer les droites à la fois tangentes et normales à la courbe $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 2t^3 \end{cases}$ Asymptotes.

Exercice 5 (PT 2006 — Partie A)

On désigne par \mathcal{E} l'ensemble d'équation

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

- 1) Quelle est la nature de l'ensemble \mathcal{E} ? Donner un paramétrage de \mathcal{E} .

$$x(t) = 3 \cos t \quad \text{et} \quad y(t) = 2 \sin t$$

- 2) Déterminer le repère de Frenet de cet arc au point $M(t)$, puis le rayon de courbure en ce point.
- 3) En déduire les coordonnées du centre de courbure de \mathcal{E} associé au point $M(t)$.
- 4) On désigne par Γ l'arc paramétré comme suit ($t \in \mathbb{R}$) :

$$x(t) = \frac{5}{3} \cos^3 t \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{5}{2} \sin^3 t$$

Γ' est l'arc de Γ correspondant à $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. En étudiant les fonctions x et y , construire avec soin Γ' ; on précisera les tangentes aux extrémités de Γ' .

- 5) Par quelles transformations géométriques déduit-on la construction de Γ de celle de Γ' ? Construire Γ sur la même figure.
- 6) Calculer l'aire \mathcal{A} intérieure à la courbe fermée Γ .

Exercice 6 (PT 2008 A)

Le plan euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

- 1) Soit Γ la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto M(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = 2 \operatorname{ch}(t) \\ y(t) = 3 \operatorname{sh}(t) \end{cases}$$

- a) Montrer que Γ est une portion de conique dont on précisera la nature et l'excentricité.
- b) Former une équation cartésienne de chacune des asymptotes de Γ . Tracer proprement la courbe Γ et ses asymptotes.
- 2) On note Γ' la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto C(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{13}{2} \operatorname{ch}^3(t) \\ y(t) = -\frac{13}{3} \operatorname{sh}^3(t) \end{cases}$$

- a) Montrer que Γ' possède un axe de symétrie.
- b) Étudier la courbe Γ' au point $C(0)$.
- c) Étudier les branches infinies de Γ' et comparer leurs directions à celles des asymptotes de Γ .
- d) Tracer Γ' sur la même figure que Γ .
- e) Montrer les relations

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(2t) &= \operatorname{ch}^2(t) + \operatorname{sh}^2(t) = 2 \operatorname{ch}^2(t) - 1 = 2 \operatorname{sh}^2(t) + 1 \\ \operatorname{sh}(2t) &= 2 \operatorname{sh}(t) \operatorname{ch}(t) \end{aligned}$$

En déduire la longueur $\int_0^1 \left\| \frac{d\vec{OC}}{dt} \right\| dt$ de l'arc Γ' entre $t = 0$ et $t = 1$.

Exercice 7

Soit \mathcal{C} la courbe définie implicitement par l'équation

$$x^y y^x = y^y \quad (x > 0, y > 0)$$

- 1) Pour tout réel $t > 0$, étudier l'intersection de la courbe \mathcal{C} avec la droite D_t d'équation $y = tx$. En déduire un paramétrage de la courbe \mathcal{C} . (On vérifiera que tous les points de \mathcal{C} ont été paramétrés).
- 2) Étudier les variations de x et y en fonction de t .
- 3) Étudier les branches infinies de \mathcal{C} .
- 4) Tracer la courbe \mathcal{C} .

Solution.

- 1) L'équation s'écrit $y \ln x + x \ln y - y \ln y = 0$. En remplaçant y par tx il vient

$$tx \ln x + (1-t)x \ln(tx) = tx \ln x + (1-t)x \ln t + (1-t)x \ln x = 0$$

Après simplification ($x \neq 0$), on trouve $x = e^{(t-1)\ln t}$ et $y = tx = e^{t \ln t}$.

L'intersection de la courbe \mathcal{C} avec la droite D_t d'équation $y = tx$ est donc réduite à un point.

Par construction, les points de coordonnées $(e^{(t-1)\ln t}, e^{t \ln t})$ sont sur la courbe \mathcal{C} .

Réciproquement, on remarque que les droites $(D_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$ balayent tout le quart de plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$, donc aucun point de \mathcal{C} ne nous a échappé.

En conclusion, les formules précédentes forment un paramétrage de \mathcal{C} .

- 2) Les fonctions x et y sont dérivables sur \mathbb{R}_+^* , et

$$x'(t) = \left(-\frac{1}{t} + 1 + \ln t\right) e^{(t-1)\ln t} \quad \text{et} \quad y'(t) = (1 + \ln t) e^{t \ln t}$$

La fonction $g(t) = -\frac{1}{t} + 1 + \ln t$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* (dérivée) et $g(1) = 0$. Ainsi,

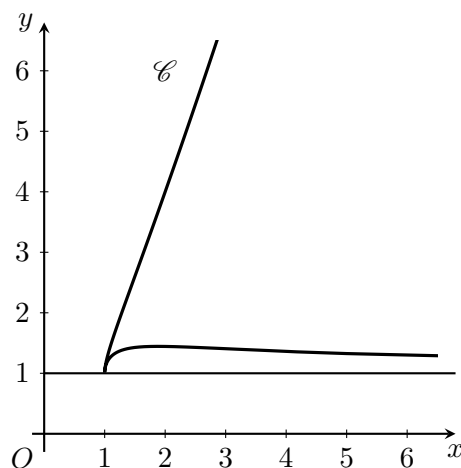
- $x(1/e) = e^{1-\frac{1}{e}}$
- $y(1/e) = e^{-\frac{1}{e}}$

t	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$x'(t)$		-	0	+
x	$+\infty$	$x(1/e)$	1	$+\infty$
$y'(t)$		-	0	+
y	1	$y(1/e)$	1	$+\infty$

- 3) Au voisinage de $t = 0$, la courbe \mathcal{C} admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$. La courbe est située sous l'asymptote.

Lorsque $t \rightarrow +\infty$: $\frac{y}{x} = t \rightarrow +\infty$, donc la courbe \mathcal{C} admet une branche parabolique de direction $(0y)$.

- 4) Tracé (il faudrait placer le point $(x(1/e), y(1/e))$ (tangente horizontale) et $(1, 1)$ (tangente verticale).



□

Exercice 8

Soit \mathcal{C} la courbe d'équation cartésienne $(y - 2a)(x^2 + y^2) + a^2y = 0$. Équation polaire, représentation paramétrique et construction.

Exercice 9

Soit Γ la courbe ayant pour représentation paramétrique

$$x(t) = t + \sin t - 4 \sin \frac{t}{2} \quad \text{et} \quad y(t) = 3 + \cos t - 4 \cos \frac{t}{2} \quad t \in [0, 4\pi]$$

- 1) Construire Γ .
- 2) Expliciter une abscisse curviligne sur Γ . Calculer la longueur totale de Γ .
- 3) Pour $t \in]0, 4\pi[$, préciser le repère de Frenet et le rayon de courbure de Γ au point de paramètre t .
- 4) Construire la développée de Γ .

Exercice 10 (D'après écrit PT)

Soit \mathcal{C} la courbe d'équation cartésienne $y = \text{ch}(x)$.

- 1) Calculer le rayon de courbure en un point A d'abscisse α de la courbe \mathcal{C} .
- 2) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à \mathcal{C} en A .
- 3) Soit A_1 et A_2 deux points de \mathcal{C} , d'abscisses respectives α_1 et α_2 , tels que les tangentes à \mathcal{C} en ces points soient orthogonales.

Si on note R_1 et R_2 les rayons de courbures aux points A_1 et A_2 , calculer $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

- 4) Déterminer les développantes de \mathcal{C} puis tracer celle qui admet l'axe (Ox) comme asymptote.

Exercice 11

Déterminer l'enveloppe de la famille $D_t : (t + 1)x + (t - 2t^2)y + t^2 = 0$ ($t \in \mathbb{R}$).

Exercice 12

Soit Γ la courbe admettant un paramétrage $x(t) = \frac{2}{t^2 + 1}$ et $y(t) = \frac{t^2 - 1}{t(t^2 + 1)}$.

Pour $t \notin \{0, 1, -1\}$, on désigne par Δ_t la droite passant par $M(t)$ et $M(1/t)$.

- 1) Déterminer l'enveloppe de la famille $(\Delta_t)_t$.
- 2) Montrer que cette enveloppe est contenue dans une conique que l'on déterminera.

Exercice 13 (ddl – Astroïde)

a) Construire l'astroïde dont un paramétrage est

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

- b) Calculer la longueur de cette courbe
 c) Calculer la courbure en tout point régulier via obtention d'une détermination angulaire.

Exercice 14 (folium de Descartes)

Soit Γ le folium de Descartes de paramétrage

$$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^3} \\ y = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

- 1) Symétrie, réduction du domaine d'étude ($t \mapsto 1/t$).
- 2) Étude et tracé (asymptote en $x + y + 1/3 = 0$, point double).
- 3) Montrer que Γ a pour équation cartésienne $x^3 + y^3 = xy$.

Exercice 15 (Épicycloïde)

Une épicycloïde est une courbe plane transcendante, trajectoire d'un point fixé à un cercle (rayon r) qui roule sans glisser à l'extérieur un autre cercle (rayon R) dit directeur. Avec $a = \frac{R+r}{r}$, en divisant par r ,

$$\begin{cases} x = a \cos(t) - \cos(at) \\ y = a \sin(t) - \sin(at) \end{cases}$$

$a = 2$ cardioïde, $a = 3$ néphroïde, $a = 4$ (3 pétales), etc.

$a = 1 + 1/2$ point double et point de rebroussement, $a = 1 + 3/2$ 3 fois.

$a = 1 + 7/4$ 3 points doubles par point de rebroussement. 7 fois.

Exercice 16 (Hypocycloïde)

Une hypocycloïde est une courbe plane transcendante, trajectoire d'un point fixé à un cercle (rayon r) qui roule sans glisser à l'intérieur d'un autre cercle (rayon R) dit directeur. Avec $a = \frac{R-r}{r}$, en divisant par r ,

$$\begin{cases} x = a \cos(t) + \cos(at) \\ y = a \sin(t) - \sin(at) \end{cases}$$

$a = 1$ deltoïde, $a = 2$ astroïde,

$a = 1 - 1/2$ point double et point de rebroussement (?) etc..

Exercice 17 (Aurélien)

Centre de courbure de $t \mapsto (3 \tan^2 t, 2 \tan^3 t)$.

Exercice 18 (Aurélien)

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on considère Γ_λ définie par

$$x = \frac{\lambda}{t} + \frac{1}{t+1} \quad y = \frac{1}{t} + \frac{\lambda}{t-1}$$

- 1) Asymptote D_λ de Γ_λ .
- 2) Enveloppe des D_λ .