Programme de colle Bilinéaire

Classe de PT

Lycée La Martinière

Exercice 1
Soit E un espace préhilbertien, dont on note $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire.
Soit f, g deux fonctions de E dans E telles que $\forall (x, y) \in E^2 \quad < x, f(y) >=< g(x), y >$.
Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 2 (PT 2009 A)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien, et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.
Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E \; \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 3 (ddl)
Soient $f \in \mathscr{O}(E)$ et V un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que :

$$V \text{ est stable pour } f \text{ si, et seulement si, } V^{\perp} \text{ l'est}$$

Exercice 4
Soit $E = \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)\d{t} + f(1)g(0) + f(0)g(0)$$

1) Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

2) Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 (e^t - at - b)^2 \, dt$.

Exercice 5 (ddl)
Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité :

$$\forall x, y \in E, < x, y >= 0 \implies < f(x), f(y) >= 0$$

1) Calculer $< u + v, u - v >$ pour u, v vecteurs unitaires.

2) Établir qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha \|x\|$$

3) Conclure qu'il existe $g \in \mathscr{O}(E)$ vérifiant $f = \alpha.g$

Exercice 6 (ddl)
Soient E un espace euclidien et f une application de E vers E vérifiant

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

1) Montrer que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

2) Établir

$$\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$$

3) Établir que
$$\forall x,y \in E, < f(x), f(y) >=< x,y >$$

4) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Justifier que
$$\forall x \in E, f(x) = \sum_{k=1}^{n} < e_k, x > f(e_k)$$

5) En déduire que f est un automorphisme orthogonal de E.

Exercice 7 (ddl)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{M}$ l'espace vectoriel réel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose
$$\varphi\colon (A,B) \in \mathscr{M}^2 \mapsto \operatorname{Tr} {}^t AB$$

1) Montrer que φ est un produit scalaire.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\Omega \in \mathscr{M}$ pour que $M \mapsto \Omega M$ soit φ-orthogonale.

Exercice 8 (ddl)
Un endomorphisme u d'un espace euclidien E est dit antisymétrique si
$$\forall x \in E, < u(x), x >= 0$$
Soit u un endomorphisme antisymétrique.

1) Établir que, pour tout $x, y \in E$,
$$< u(x), y >= - < x, u(y) >$$

2) En déduire que la matrice A de u dans une base orthonormée est elle-même antisymétrique.

3) Quelles sont les seules valeurs propres réelles possibles pour u ?
À quelle condition un endomorphisme antisymétrique est-il diagonalisable ?

4) Montrer que l'endomorphisme $s = u \circ u$ est symétrique.
Soit a l'une de ses valeurs propres et V_a le sous-espace propre associé.

5) Soit $x \in V_a \setminus \{0_E\}$. Montrer que
$$< s(x), x >= a\|x\|^2 = -\|u(x)\|^2$$
et en déduire que $a < 0$.

6) On considère toujours $x \in V_a \setminus \{0_E\}$
Montrer que $F = \operatorname{Vect}(x, u(x))$ et $F^\perp$ sont stables par u.
Montrer que l'endomorphisme induit sur F par u a une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$
dans une base orthonormée (on précisera b)

7) Conclure que la dimension E est paire.

Exercice 9 (CCP MP 2010)

1) Cas des hyperplans : soit u un vecteur non nul de E et H l'hyperplan $(\operatorname{Vect}\{u\})^\perp$. Exprimer pour $x \in E$, la distance $\mathrm{d}(x,H)$ en fonction de $< x, u >$ et de $\|u\|$.

2) On note H l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

  a) Justifier que H est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $H^\perp$.

  b) Si M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer la distance $\mathrm{d}(M,H)$.

Exercice 10 (Polynômes de Hermite)
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E. Orthogonaliser la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) En déduire la projection de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

3) Montrer que $u(P) = P'' - XP'$ est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 11 (ddl)
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer

$$(\mathrm{Tr}\,(AB + BA))^2 \leqslant 4\,\mathrm{Tr}\,(A^2)\,\mathrm{Tr}\,(B^2)$$

Exercice 12
$(\mathrm{Tr}\,(A))^2 \leqslant n\,\mathrm{Tr}\,({}^tAA)$ et cas d'égalité.

Exercice 13 (OT 2012 CCEM)
Soit A une matrice orthogonale $A = (a_{ij})$. Montrer que $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n$.

Exercice 14 (ddl)
Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E telle que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x)^2$$

Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ constitue une base orthonormée de E. Indication : *Commencer par montrer que c'est une famille orthonormée, puis raisonner par l'absurde.*

Exercice 15 (ddl)
Soient a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel E, k un réel et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application déterminée par

$$\varphi(x, y) = \langle x, y\rangle + k\,\langle x, a\rangle\,\langle y, a\rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisant pour que φ soit un produit scalaire. Indication : $1 + k > 0$, *regarder* $\varphi(a, a)$.

Exercice 16 (PT 2008, B partie IV)
Soit E un espace euclidien, $a \in E$ unitaire, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in E$ on pose $f(x) = x + \alpha < x, a > a$.

1) Vérifier que f est un endomorphisme symétrique de E.

2) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel stable par f, alors $F^{\perp}$ est également stable par f.

3) Montrer que a est un vecteur propre de f.

4) Montrer que 1 est une valeur propre de f. Quel est le sous-espace propre associé ?

5) Pour quelles valeurs de α f est-il une isométrie ? Caractériser dans ce cas cet endomorphisme.

Exercice 17 (BCE 2013 S)
Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire est noté $< ., . >$, et la norme $\|.\|$.

1) Soit X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y de E dans la base $\mathscr{B}$. Rappeler l'expression de $< x, y >$ à l'aide de X et Y.

2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, de matrice A dans la base $\mathscr{B}$. On note f^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est ${}^tA$.

  a) Vérifier que l'on a $\forall (x, y) \in E^2, < f(x), y >=< x, f^*(y) >$.

  b) Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall (x, y) \in E^2, < f(x), y >=< x, f^*(y) >$.

3) On suppose désormais que $f \in \mathscr{L}(E)$ possède au moins une valeur propre λ réelle, et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan E stable par f.

  a) Montrer que λ est valeur propre de f^*.

b) On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ. Montrer que $(\text{Vect } u)^\perp$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f.

Exercice 18

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = {}^tAA$ est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont positives.

2) Réciproquement : soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$. Dans quel cas A est-elle inversible ?

3) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $O \in O(n)$ et $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telles que $A = OS$. On pourra chercher S telle que ${}^tAA = S^2$.

Exercice 19 (De l'endomorphisme à la matrice)

1) Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'angle $\pi/3$ et d'axe $\text{Vect}\left((1,1,1)\right)$

2) Soit $a \in \mathbb{R}^3$ unitaire et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x) = a \wedge x + < a, x > a$. Reconnaître f.

Exercice 20 (De la matrice à l'endomorphisme)

Montrer que les endomorphismes $f_i \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ associés aux matrices suivantes (dans la base canonique) sont orthogonaux.

$$M_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Décrire les éléments propres. Si c'est une rotation, déterminer l'axe et l'angle. Calculer M_3^{481}.

Exercice 21 (ddl)

Soit E un espace euclidien de dimension 3, r dans $\mathrm{SO}(E)$ et s une symétrie orthogonale.
Caractériser l'application

$$s \circ r \circ s$$

<u>Indication</u> : $= srs^{-1}$, *donc regarder* $s(X)$ *avec* $X \subset E$.

Exercice 22 (ddl)

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ non nul.
Montrer que f est une rotation vectorielle si, et seulement si,

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, f(\vec{u} \wedge \vec{v}) = f(\vec{u}) \wedge f(\vec{v})$$

Exercice 23 (ddl)

(Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ euclidien : $a \wedge (b \wedge c) = (a \mid c)b - (a \mid b)c$. (on pourra utiliser les coordonnées de a, b, c dans une base où elles comportent un maximum de 0))
Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$ où a est un vecteur unitaire puis reconnaître f.