Programme de colle Suites et séries de fonctions

Classe de MP*

Lycée du Parc

1 Convergence uniforme, convergence simple

Sans intégrales impropres ou convergence dominée.

Exercice 1
Soit $d \in \mathbb{N}$ et $(f_n) \in \mathbb{R}_d[X]$ telles que f_n converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f \in \mathbb{R}_d[X]$ et qu'il y a convergence uniforme sur tout compact.

Solution. Une norme adaptée à la convergence simple : $< P, Q >= \displaystyle\sum_{i=0}^{d} P(a_i)Q(a_i)$, avec les a_i deux à deux distincts.
La CS implique la convergence pour $\|.\|_{2,\mathrm{Lag}}$. Donc f_n tend vers $P \in \mathbb{R}_d[X]$ au sens de $\|.\|_{2,\mathrm{Lag}}$, donc au sens de $\|.\|_{\infty,[a,b]}$, donc au sens de la convergence simple : $f = P$. ☐

Exercice 2
Soit E et F métriques et Card $F \geqslant 2$. A quelle condition existe-t-il une distance d sur F^E telle que $f_n \xrightarrow{\mathrm{CS}} f$ si et seulement si $d(f_n, f) \to 0$? Montrer que la condition (CNS) est E dénombrable.

Solution. Si $E = \{x_n\}$, on pose $d(f,g) = \displaystyle\sum_n \min\left(\frac{1}{2^n}, d(f(x_n), g(x_n))\right)$ ☐

Exercice 3 (ddl – Théorème de Dini)
Soient des fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, la suite réelle $(f_n(x))$ est décroissante. On désire montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme.

1) Justifier l'existence de
$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty$$

2) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$.

3) En observant que pour tout $p \leqslant n$,
$$f_n(x_n) \leqslant f_p(x_n)$$
montrer que $\|f_n\|_\infty \to 0$ et conclure.

Solution.

1) (f_n) décroissante donc $\|f_n\|_\infty$ aussi. Minorée par 0, donc converge.

2) $f_n \geqslant 0$ et compacité.

3) Quitte à extraire, $x_n \to \alpha$. De plus, $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty$. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, d'abord en n puis en p, on trouve que cette limite est négative, donc nulle.

□

Exercice 4 (ddl)
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{si } x \in [0, n] \qquad \text{et} \qquad f_n(x) = 0 \quad \text{si } x > n$$

Étudier le mode de convergence de (f_n).

Solution. Convergence simple immédiate. Concavité du ln : $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-x}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe M tel que $e^{-M} \leqslant \varepsilon$. Donc $e^{-x} \leqslant \varepsilon$ sur $[M, +\infty[$.
Sur $[0, M]$: majorer $\left|\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n}\right|$ en $\frac{K}{n^2}$.
D'où $\left|\exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) - \exp(-x)\right| \leqslant \left|\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) - (-x)\right| \leqslant \frac{K}{n} \leqslant \varepsilon$ (pour n assez grand). □

Exercice 5 (ddl)
On définit (u_n) suite de fonctions de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$u_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

[b)] En déduire que pour $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\|u_{n+p} - u_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

[c)] Établir que pour tout $x \in [0, 1]$, la suite numérique $(u_n(x))$ est de Cauchy.
d) Établir que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction u non nulle vérifiant

$$u'(x) = u(x - x^2)$$

(on peut le faire directement avec une série normalement convergente.

Solution. a) Rec. b) c) évidents.
d) $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$ est complet. Donc u existe, est $\mathscr{C}^0$ et vérifie $u(x) = 1 + \int_0^x u(t - t^2)\,\mathrm{d}t$. □

Exercice 6 (ddl)
Soient $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n f(x)$$

a) Former une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
b) Montrer que $\sum f_n$ converge unif. sur $[0, 1]$ si et seulement si $f(1) = 0$ et f dérivable en 1 avec $f'(1) = 0$.

Solution. a) CN : $f(1) = 0$. CS à la main avec des ε, en coupant $[0, 1 - \alpha]$ et $[1 - \alpha, \alpha]$.
b) Notons S la somme. $S(x) = f(x)/(1 - x)$ sur $[0, 1[$ et 0 en $x = 1$. Par convergence uniforme, S continue en 1, donc f dérivable en 1 de dérivée 0.
Réciproquement, calculer les sommes partielles (série géométrique !). □

Exercice 7 (ddl)
On note U l'ensemble des complexes de module 1 ; soit ω un complexe de module $\neq 1$. Exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1}{z-\omega}$ soit limite uniforme sur U d'une suite de fonctions polynomiales.

Solution. Si $|\omega| > 1$, DSE géométrique, et U dans le disque de convergence donc CV uniforme.
Si $|\omega| < 1$, par l'absurde. Soit $P_n \xrightarrow{\text{CVU}} f$. Par la série géométrique,

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikt}}{e^{it}-\omega}\,\mathrm{d}t = 0$$

Donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{P_n(e^{it})} f(e^{it})\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout n, et tend vers $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|f(e^{it})\right|^2\,\mathrm{d}t > 0$ par convergence uniforme des P_n. □

Exercice 8 (ddl)
Justifier l'existence de $f(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Montrer que f est 1-périodique et qu'on a $f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Solution. Il faut avoir Confiance. Écrire des sommes partielles, et tout vient. □

Exercice 9 (ddl)
Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$. a) Montrer que F est bien définie.
b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.
c) Simplifier $F(x) + F(x+1)$.
d) Montrer que pour $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
e) Donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.

Solution. a) CSA b) majoration de $\|.\|_\infty$. c) $\dfrac{1}{x}$ par décalage d'indices.
d) L'intégrale G vérifie la même relation que F, donc $H = F - G$ est 1-périodique. On montre que $\lim\limits_{+\infty} H = 0$, donc $H = 0$. $(0 \leqslant F(x) \leqslant F(x) + F(x+1) = \dfrac{1}{x} \to 0)$.
e) En 0 : $F(x+1) \to F(1)$ par $\mathscr{C}^0$, donc $F(x) = \dfrac{1}{x} - F(x+1) = \dfrac{1}{x} + F(1) + o(1) \sim \dfrac{1}{x}$.
En $+\infty$: Par décroissance $F(x+1) \leqslant F(x) \leqslant F(x-1)$ d'où l'on déduit $F(x) \sim \dfrac{1}{2x}$. □

2 Séries entières

Exercice 10
Soit $f(z) = \displaystyle\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$, avec $(a_n) \in \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Soit E une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie, munie d'une norme $|||.|||$. Montrer que, pour tout $u \in E$ tel que $|||u||| < R$, $f(u)$ existe et est un polynôme en u. Attention, les coefficients de ce polynôme dépendent de u (ex : e^λ avec λ valeur propre).

Solution. Les sommes partielles sont dans $F = \mathbb{K}[u]$ qui est dimension finie, donc fermé. □

Exercice 11
Rayon de convergence et somme des séries entières $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(na)}{n!\sin^n a} x^n$, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n!\sin^n a} x^n$ avec $a \notin \pi\mathbb{Z}$.

Exercice 12
Rayon de convergence de

1) d_n le nombre de diviseur $\geqslant 1$ de n et s_n la somme de ces diviseurs.

2) a_n la n-ième décimale de π.

3) $\sum x^{p_n}$ où p_n est le n-ième nombre premier.

Exercice 13
Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, une série entière de rayon de convergence égal à 1, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

1) **a)** Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est 1.

b) Soient S_a et S_b, les sommes des séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. En déduire que

$$\forall x \in D(0,1), \quad S_b(x) = \frac{1}{1-x} S_a(x).$$

2) **a)** Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

b) En déduire que $\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Exercice 14
À l'aide d'une équation différentielle, déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes

1) $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ **2)** $f(x) = (\text{Arcsin } x)^2$ **3)** $f(x) = (\ln(1+x))^2$

Exercice 15
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}\binom{2n}{n}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} = -2(2n-1)a_n$.

2) Donner le rayon de convergence R de la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, puis montrer que f est solution sur $]-R,R[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on explicitera.

3) En déduire f.

Exercice 16
Soit a_n, $b_n > 0$, de rayon $R = +\infty$, telles que $a_n \sim b_n$. Montrer que $f \sim g$ pour $x \to +\infty$.
En déduire un équivalent de $\sum_{n \geqslant 1} \left(A + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 17 (formule de Cauchy)
$f(z) = \sum_n a_n z^n$ de rayon $R > 0$, soit $r > 0$ et $z \in \mathbb{C}$.

Pour $|z| < r < R$ on considère $I(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{re^{it} f(re^{it})}{re^{it} - z}\,\mathrm{d}t$

Montrer que $I(r) = f(z)$.

Solution. DSE de $\frac{1}{1-\frac{Z}{z}}$ avec $z = re^{it}$ et interversion $\int$ et $\sum$ par convergence normale à l'intérieur du disque. □

Exercice 18 (S)
Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon R. Montrer que, pour tout $r \in]0, R[$, $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta$.
En déduire que

1) Si f est bornée et $R = +\infty$, alors elle est constante.

2) S'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $|f(z)| \leqslant P(|z|)$, alors f est un polynôme de degré $\leqslant n$.

3) Si f est bornée par M sur $D(0, R)$ ($R \in \mathbb{R}_+$), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(0)| \leqslant \dfrac{n!M}{R^n}$.

Solution. Convergence uniforme à l'intérieur du disque : calcul de l'intégrale, il ne reste que le cas $k = n$.
Pour 1), en majorant $|f|$ dans l'intégrale, on majore a_n par du K/r^n, donc $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour 3), $f(z) = z^n$ montre que l'on ne peut pas améliorer le résultat. □

Exercice 19 (R)
DSE au voisinage de 0 de $z \mapsto \dfrac{1}{1 + z + z^2 + z^3 + z^4}$, $z \mapsto \dfrac{e^z}{1 - z}$, $x \mapsto \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^\alpha$, $x \mapsto \dfrac{\text{Arcsin}\, x}{\sqrt{1 - x^2}}$

Solution. $(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)\sum_n a_n z^n = 1$, idem, équation différentielle ($y' = \dfrac{\alpha}{1 + x^2}y$), $\sqrt{1 - x^2}y = \text{Arcsin}\, x$ puis dériver. □

Exercice 20 (R)
Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+k} + \sum_{j=0}^{k} a_{n+k-j}\lambda_j = 0$. Montrer que $\sum_n a_n z^n$ a un rayon de convergence strictement positif et que sa somme est une fraction rationnelle. Étudier la réciproque.

Solution. À la main. □

Exercice 21 (Rudin)
Soit f DSE en 0 de rayon $R > 0$.

1) Montrer que f est DSE en tout point $a \in D(0, R)$.

2) En déduire que les zéros de f sont isolés (ou $f = 0$).

3) Montrer que Card $(Z(f))$ est au plus dénombrables.

Remarque : f holomorphe sur Ω ouvert connexe suffit.

Solution.

1) Familles sommables ?

2) Soit $Z(f) = f^{-1}(0)$ l'ensemble des zéros de f, et A l'ensemble des points d'accumulation de $Z(f)$. Par continuité de f, $Z(f)$ est fermé et donc $A \subset Z(f)$.
Soit $a \in A$. Il existe $R' > 0$ tel que $f(z) = \sum_n c_n(z - a)^n$ pour tout $z \in D(a, R')$. Soit $c_n = 0$ pour tout n, et $D(a, R') \subset Z(f)$, donc $a \in A^\circ$. Soit il existe n_0 tel que $c_{n_0} \neq 0$ et $f(z) = \sum_{n \geqslant n_0} c_n(z - a)^n = (z - a)^{n_0} g(z)$. Et g ne s'annule pas sur un voisinage de a : donc a est isolé dans $Z(f)$, donc n'appartient pas à A.
Ainsi A est fermé, ouvert, dans un connexe ($D(0, R)$). Donc $A = \emptyset$ ou $A = D(0, R)$.

3) $D(0, R) = \cup_{n \in N} \overline{D(0, r_n)}$, avec $\overline{D(0, r_n)}$ compact. D'après ci-dessus, $\overline{D(0, r_n)}$ ne contient qu'un nombre fini de zéro (sinon on peut extraire une sous suite qui converge dans $\overline{D(0, r_n)}$), d'où la dénombrabilité. □