# Programme de colle Séries numériques

Classe de MP*

Lycée du Parc

**Exercice 1**
Déterminer la nature des séries de terme général :

**1)** $u_n = \dfrac{1+\ln(n)}{n^2}$, **2)** $v_n = \dfrac{2^n+5}{3^n+11}$, **3)** $w_n = e^{-\sqrt{n}}$, **4)** $y_n = \dfrac{(n+1)^4}{n!+1}$,

**5)** $a_n = (\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n})^n$, **6)** $b_n = \dfrac{n^{\ln(n)}}{\ln(n)^n}$, **7)** $c_n = n^2\sin(\dfrac{1}{2^n})$, **8)** $\dfrac{\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2}-\lfloor n^{3/2}\rfloor+n}$, (M-P)

**9)** $d_n = (n^6+3)^a-(n^2+2)^{3a}$, où $a\in\mathbb{R}$. **10)** $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$ **11)** $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$

**Exercice 2**
Soit $f$, une fonction positive, décroissante et continue sur $[1,+\infty[$. On note :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad F(n)=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(t)dt$$

**1)** Montrer que la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire que la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

**2)** Applications.

**a)** Soit $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{\ln(n)^\alpha}{n}$, où $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de $\alpha$ la série de terme général $u_n$ est-elle convergente ?

**b)** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

*Remarque. La limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la constante d'Euler $\gamma\approx 0{,}57721566$.*

**Exercice 3**
Soit $(u_n)$ une suite décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge.

**1)** Montrer que $\lim u_n=0$ et que $\sum n(u_n-u_{n+1})=\sum u_n$.

**2)** Calculer $S_p=\displaystyle\sum\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$.

**Exercice 4**
Soit $u_{n+1}=\dfrac{1}{n}e^{-u_n}$

**1)** Étudier la nature de la suite $u_n$

**2)** Étudier la nature de la série de terme général $u_n$

**3)** Étudier la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$

**Solution.**

**1)** $u_n\geqslant 0$ donc $e^{-u_n}\leqslant 1$, d'où $0\leqslant u_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{n}$. La suite converge vers $0$.

**2)** Puisque $u_n \to 0$, nous pouvons faire un DL : $e^{-u_n} = 1 - u_n + o(u_n)$. Donc $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ qui est divergente, ainsi la série à termes positifs $u_n$ diverge.

**3)** $(-1)^{n+1}u_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-u_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}u_n + o(\dfrac{u_n}{n})$. Or $u_n \sim 1/n$ donc $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}u_n$ est équivalente en valeur absolue à $1/n^2$, convergente d'après Riemann, et le premier terme est une série alternée convergente.

$\square$

**Exercice 5 (ddl)**
On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \sqrt{k}}$$

Donner un équivalent simple de $S_n$.
Montrer que

$$S_n = \ln n + C + o(1)$$

**Exercice 6 (X PSI – ddl)**
On dit que la série de terme général $u_n$ enveloppe le réel $A$ si, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$u_n \neq 0 \text{ et } |A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)| \leqslant |u_{n+1}|$$

On dit qu'elle enveloppe strictement le réel $A$ s'il existe une suite $(\theta_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $]0,1[$ telle que pour tout entier naturel $n$ :

$$A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = \theta_{n+1}u_{n+1}$$

a) Donner un exemple de série divergente qui enveloppe $A > 0$.
Donner un exemple de série convergente qui enveloppe un réel.
Donner un exemple de série convergente qui n'enveloppe aucun réel.
b) Démontrer que, si la série de terme général $u_n$ enveloppe strictement $A$, alors elle est alternée.
Démontrer que $A$ est alors compris entre deux sommes partielles consécutives.
c) Démontrer que, si la série de terme général $u_n$ est alternée et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$
$A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$ est du signe de $u_{n+1}$, alors, elle enveloppe strictement $A$.
d) Démontrer que, si la série de terme général $u_n$ enveloppe $A$ et si la suite de terme général $|u_n|$ est strictement décroissante, alors, la série est alternée et encadre strictement $A$.

**Exercice 7**
Soient $(u_n)$ une suite de réels positifs et

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

**Exercice 8**
Soit $(u_n)$ telle que $u_{n+1} = o(u_n)$. Montrer que $\sum_{k\geqslant n} u_k \sim u_n$. Indication : $\sum_{k\geqslant n+1} u_k = o(u_n)$, *série géométrique.*

**Exercice 9 (transformation d'Abel – IPP – cours)**
Soit $u_n = \alpha_n v_n$, et $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

**1)** Montrer que $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1})S_k + \alpha_n S_n$.

**2)** Supposons que $(\alpha_n)$ soit positive, décroissante et de limite nulle, et que $(S_n)$ soit bornée. Montrer que $\sum u_n$ est convergente.

**3)** en déduire le CSA.

**Exercice 10 (Produit de Cauchy – convolution)**

**1)** Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergente (à valeur dans $\mathbb{C}$). Alors la série de terme général $c_n = \sum_{p=1}^{n} a_p b_{n-p}$ est absolument convergente de limite $c = ab$. [cours]

**2)** Montrer la convergence et calculer la somme de $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2(n-p)!}$. Sachant que $\sum 1/p^2 = \frac{\pi^2}{6}$.

**3)** Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

**a)** Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.

**b)** Montrer la divergence de la série produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

**Exercice 11**

Soit $\sum u_n$ une série réelle convergente mais pas absolument convergente. Montrer que pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\sigma n} \to \ell$. Id est, quitte à changer l'ordre de sommation $\sum u_n$ tends vers n'importe quelle limite.

**Exercice 12**

**1)** $\forall (a_0, ..., a_n)$ croissants $> 0$ et $\forall (b_0, ..., b_n)$ décroissants $> 0$, et $\forall \sigma \in S_{n+1}$, $\sum_{i=0}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \geqslant \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$

**2)** Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ injective. Nature de $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

**Solution.**

**1)** Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \forall (a_0, ..., a_n) \text{ croissants } > 0 \text{ et } \forall (b_0, ..., b_n) \text{ décroissants } > 0, \text{ et } \forall \sigma \in S_{n+1}, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \geqslant \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie : $S_1 = \{\text{id}\}$.
- $\underline{\mathcal{H}_1}$ est vraie en regardant les deux éléments de $S_2$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$ : Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Si $\sigma$ a un point fixe, on retire l'indice en question et on applique $\mathcal{H}_n$.

  Sinon, soit $j = \sigma(n)$, et $\tau$ la permutation entre $j$ et $n$. Alors en appliquant $\mathcal{H}_1$ on a

  $$\sum_i a_i (b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(\tau(i))}) \geqslant 0$$

  donc

  $$\sum_i a_i b_{\sigma(i)} \geqslant \sum_i a_i b_{\sigma(\tau(i))} \geqslant \sum_i a_i b_i$$

  d'après $\mathcal{H}_n$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad \mathcal{H}_n \text{ vraie}}$

**2)** Soit $n$ fixé. On peut supposer $\sigma$ à valeur dans $[\![0, n]\!]$, ça diminue la valeur de $U_n$. Puis 1).

□

**Exercice 13 (ddl)**

Soit $(u_n)$ une suite réelle telle qu'il y ait convergence de la série $\sum u_n^2$

Soit $\sigma$ une bijection de $\mathbb{N}$ et $(v_n)$ la suite déterminée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\sigma(n)}$$

a) Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum v_n^2$.
b) Quelle est la nature de la série $\sum |u_n v_n|$ ?
c) Déterminer les bornes supérieure et inférieure de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n|$$

pour $\sigma$ parcourant l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$.

**Exercice 14 (ddl)**
Etablir que pour $x \in \left]-1,1\right[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$

en notant $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de $n$. Indication : *famille sommable*

**Exercice 15 (ddl)**
Justifier

$$\sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2} = \frac{3}{4p^2}$$

En déduire

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1,n\neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2} \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1,p\neq n}^{+\infty} \frac{1}{n^2-p^2}$$

Cette étude montre que l'on ne peut pas permuter deux sommes infinies sans moult justifications !

**Exercice 16**
On considère l'espace préhilbertien $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles de carré sommable (i.e. la série $\sum |u_n|^2$ converge), muni de son produit scalaire canonique

$$< u, v >= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

On note $F$ l'ensemble des suites réelles à support fini, c'est-à-dire nulles à partir d'un certain rang (ce rang dépendant de la suite considérée).

**1)** Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{R})$, différent de $\ell^2(\mathbb{R})$.

**2)** Montrer que $F^\perp = \{0\}$

**3)** En déduire que $F^{\perp\perp} \neq F$

**Solution.**

**1)** Immédiat.

**2)** On note $e_i$ la suite valant 1 en $i$ et 0 ailleurs. Pour tout $i$, cette suite est dans $F$, et $(u|e_i) = 0$ entraîne $u = 0$.

**3)** Immédiat : $\{0\}^\perp = \ell^2$.

□