Programme de colle Suites

Classe de MPSI

Lycée du Parc

Exercice 1
Soit u_n une suite croissante dont une sous-suite converge. Montrer que u_n converge.

Solution. Majorer u_n. $\square$

Exercice 2
Soit u_n une suite telle que u_{2n}, u_{3n} et u_{2n+1} convergent. Montrer que u_n converge.

Solution. Considérer les suites extraites « intersections » de celles données par l'énoncer pour montrer que toutes les limites sont égales. De plus u_{2n} et u_{2n+1} couvrent tous les u_n. $\square$

Exercice 3
Soit p_n et q_n deux suites d'entiers, avec $q_n > 0$. On suppose que $p_n/q_n \to \alpha$ irrationnel. Montrer que $|p_n|$ et q_n tendent vers $+\infty$.

Solution. Si l'une des deux suites tends vers une limite finie, l'autre aussi et α est rationnel. De plus une suite qui ne tends pas vers $+\infty$ admet une sous-suite bornée, qui elle même admet une sous-suite convergente. $\square$

Exercice 4

1) Montrer qu'une suite bornée n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence converge.

2) Soit u_n bornée, telle que $\lim\limits_{+\infty}(u_n + \dfrac{u_{2n}}{2}) = 1$. Étudier u_n.

Solution.

1) Soit (u_n) bornée n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence a. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Considérons $A_\varepsilon = \{n \mid |u_n - a| > \varepsilon\}$. Si A_ε est fini, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$, et la formule de la convergence vers a est vérifiée. Sinon $(u_n)_{n\in A_\varepsilon}$ est une suite extraite $u_{\varphi(n)}$ de u_n, qui est une suite bornée. Donc (Bolzano-Weierstrass) on peut en extraire une sous-suite $u_{\varphi\circ\psi(n)}$ qui converge vers b. Or $|b - a| \geqslant \varepsilon > 0$ par construction, et b est une valeur d'adhérence de (u_n), il y a une contradiction.

2) Soit (u_n) bornée, telle que $\lim\limits_{+\infty}(u_n + \dfrac{u_{2n}}{2}) = 1$. Si cette suite converge, sa limite vérifiera $\ell + \ell/2 = 1$, donc $\ell = 2/3$. Montrons que cette suite n'a qu'une seule valeur d'adhérence, $2/3$.

Par Bolzano-Weierstrass il existe une valeur d'adhérence. Soit $(u_{\varphi(n)})$ une sous-suite qui converge vers une valeur d'adhérence x_0. La limite de $(u_{2\varphi(n)})$ (et par récurrence celle de $(u_{2^p\varphi(n)})$) existe, notons là x_1 (resp. x_p). Ces limites vérifient la relation de récurrence $x_{p+1} = 2(1 - x_p)$. On homogénéise en posant $v_p = x_p - 2/3$, et on obtient $v_p = (-2)^p v_0$ qui n'est borné que si $v_0 = 0$. C'est-à-dire si $x_0 = 2/3$. La suite a donc une seule valeur d'adhérence, on peut conclure par le 1.

$\square$

Exercice 5 (Oral petites mines 2012)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement une racine dans $]0,1[$ et une racine dans $]1,+\infty[$. On les notera x_n et y_n respectivement.

2) Déterminer la limite et un équivalent de (x_n).

3) Déterminer la limite ℓ de (y_n), puis un équivalent de $y_n - \ell$.

Exercice 6 (Cesàro)
Soit u_n une suite réelle, on pose $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1) On suppose que u_n converge vers un réel ℓ, montrer que v_n converge aussi vers ℓ. Cas où ℓ est infini.

2) Montrer que, si v_n converge vers un réel ℓ et si u_n est croissante, alors u_n converge vers ℓ.

3) Est-ce toujours le cas si on omet l'hypothèse de croissance ? Si on rajoute seulement une hypothèse de positivité ?

Solution.

1) On se ramène au cas $\ell = 0$, puis on fait converger le début de la somme avec le $1/n$ et la fin grâce à la convergence de u_n. Dans le cas où ℓ est infini, même découpage de la somme. Il faut minorer le début de la somme, $\dfrac{1}{n}\left(-NA + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} u_k\right)$, par exemple par -1.

2) On peut supposer $\ell = 0$. Par l'absurde, on montre que u_n est majoré, donc convergente (croissante majorée). On applique Cesàro pour prouver que la limite est bien 0.

3) Dans le cas général, $u_n = (-1)^n$ est un contre exemple. Dans le cas positif, on peut prendre $u_n = 1 + (-1)^n$ sur le même modèle.

□

Exercice 7 (suites sous-additives)
Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs tels que $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m \quad \forall n, m$.
Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n}a_n\right)$ converge et que sa limite est $\inf\left\{\dfrac{1}{p}a_p \mid p \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 8 (théorème de Beatty)
Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$. On considère la suite $d_n(A) = \dfrac{\operatorname{Card}(A \cap \{1,\dots,n\})}{n}$. On définit la densité de A, notée $d(A)$, comme la limite de cette suite si elle existe.

1) Toutes les parties de $\mathbb{N}^*$ ont-elles une densité ?

2) Montrer que, si A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}^*$ ayant une densité, alors $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$.

3) Soit $a > 1$, quelle est la densité de $E_a = \{E(na) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

4) En déduite que si E_a et E_b forment une partition de N^*, a et b sont irrationnels et $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$.

Solution.

1) Non. la suite $(d_n(A))$ est bornée car comprise entre 0 et 1, par conséquent il faut chercher une partie A telle que $(d_n(A))$ ait plusieurs valeurs d'adhérence.

2) $\operatorname{Card}((A \cup B) \cap \{1,\dots,n+1\}) = \operatorname{Card}(A \cap \{1,\dots,n+1\}) + \operatorname{Card}(B \cap \{1,\dots,n+1\})$ puisque A et B sont disjointes. Par conséquent, en divisant par n et en passant à la limite, $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$.

□

Exercice 9

1) Montrer que si suite u_n vérifie $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$, l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle.

2) Montrer que la suite $\sin(\ln n)$ est dense dans $[-1;1]$.

3) Qu'en est-il de la suite $n^{1/3}\cos(\pi\sqrt{n})$?

Solution.

1) Utiliser le fait que sin est contractante.

$\square$