Programme de colle Polynômes

Classe de MPSI

Lycée du Parc

Exercice 1
Quels sont les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ dont la dérivée divise une des puissances ?

Solution. Si $P'|P^\alpha$, alors

$$(\deg P) - 1 = \deg P' = \sum_{a \in P^{-1}(0)} v_{X-a}(P') = \sum_{a \in P^{-1}(0)} (v_{X-a}(P) - 1) = \deg(P) - \text{Card } P^{-1}(0)$$

Donc Card $P^{-1}(0) = 1$. $\square$

Exercice 2
Soit $P = \sum_{k=0} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n. Montrer que $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ (avec p, $q \in \mathbb{Z}$ tels que $p \wedge q = 1$) est racine si et seulement si $p|a_0$ et $q|a_n$.
Montrer que $a = \cos \dfrac{\pi}{9}$ est racine d'un polynôme de degré trois à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Déduire de ci-dessus que a est irrationnel.

Exercice 3 (Critère par réduction)
Soit A un anneau factoriel (ex : $\mathbb{Z}$) intègre, de corps des fractions K, et $\mathfrak{P}$ un idéal premier de A.
Soit $f \in A[X]$, $\deg f > 0$. Soit $\overline{A} = A/\mathfrak{P}$.
On suppose que $\bar{f} \in \overline{A}[X]$ irréductible et $\deg f = \deg \bar{f}$. (où $\bar{f}$ image de f dans $\overline{A}[X]$).
Alors f est irréductible dans $K[X]$.

Solution. Notons $c(f) = pgcd(a_i)$ le contenu de f. $c(f) \neq 0$, donc ops $c(f) = 1$.
Par l'absurde : si $f = gh$, avec $g, h \in A[X]$, alors
- $\deg \bar{g} \leqslant \deg g$ et $\deg \bar{h} \leqslant \deg h$.
- $\deg g + \deg h = \deg f = \deg \bar{f} = \deg \bar{g} + \deg \bar{h}$

Donc $\deg g = \deg \bar{g}$ et $\deg h = \deg \bar{h}$.
De plus, $\bar{f}$ irréductible donc $\bar{g} \in \overline{A}^*$ (quitte à permuter). Or $\deg \bar{g} = \deg g$, donc $g \in A$.
Donc f irréductible dans $K[X]$. $\square$

Exercice 4 (suite du précédent)
Montrer que $f = X^3 - X - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
Montrer que $X^p - X - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ pour tout p premier.

Solution. Dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\bar{f}$ est irréductible (degré 3 : sinon, il a une racine), $\deg \bar{f} = \deg f$. $\square$

Exercice 5 (Eisenstein)
Soit A un anneau factoriel (ex : $\mathbb{Z}$) intègre, de corps des fractions K.
Soit $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$. Où $n > 0$. Soit $p \in A$ premier.
On suppose que
$$\begin{array}{rcl} v_p(a_n) & = & 0 \\ v_p(a_i) & \leqslant & 1 \quad \forall i < n \\ v_p(a_0) & = & 1 \end{array}$$
Alors f est irréductible dans $K[X]$.

Solution. Notons $c(f) = pgcd(a_i)$ le contenu de f. $c(f) \neq 0$, donc ops $c(f) = 1$.

Par l'absurde : soit $f = gh$, avec $g = \sum_{i=0}^{r} b_i X^i$ et $h = \sum_{i=0}^{s} c_i X^i$ dans $A[X]$ tels que $r < n$ et $s < n$.
$a_n = b_r c_s$, $a_0 = b_0 c_0$, $r + s = n$.
$v_p(a_0) = 1 = v_p(b_0) + v_p(c_0)$ ops $v_p(b_0) = 0$ et $v_p(c_0) = 1$.
$v_p(a_n) = 0$ donc $v_p(b_r) = v_p(c_s) = 0$
Soit $k = \inf\{m | v_p(c_m) = 0\}$. $v_p(c_0) = 1$ donc $k > 0$.
Or $a_k = b_0 c_k + \underbrace{b_1 c_{k-1} + \cdots + b_k c_0}_{v_p(.) \geqslant 1}$ et $v_p(b_0 c_k) = 0 + 0 = 0$. Donc $v_p(a_k) = 0$.
Or $k \leqslant s < n$: contradiction. □

Exercice 6 (application du précédent)
$X^p - p$, $1 + X + \cdots + X^{p-1}$ sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$.
$X = 1 + Y$ dans $K(Y)[X]$.

Exercice 7 (transcendance de e)
Soit $A = \sum_{k=0} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$, $\deg A > 0$, $A(0) \neq 0$, tel que $A(e) = 0$.

1) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ on pose $Q_P = \sum_{k \geqslant 0} P^{(k)}$. On note $Q = Q_P$.

Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$e^{\alpha} Q_P(0) = Q_P(\alpha) + R(\alpha) \qquad \text{où } R(\alpha) = e^{\alpha} \int_0^1 \alpha e^{-\alpha x} P(\alpha x)\,\mathrm{d}x$$

2) En déduire que $\sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) + \sum_{j=0}^{n} a_j R(j) = 0$.

3) Soit $p \in \mathbb{N}$ premier et $P = \dfrac{X^{p-1}}{(p-1)!} \left(\prod_{i=1}^{n} (X - i) \right)^p$.

Montrer que $\sum_{j=1}^{n} a_j Q(j)$ est un entier divisible par p et que, lorsque p est grand, ce n'est pas le cas de $a_0 P^{(p-1)}(0)$. En déduire que $\left| \sum_{j=0}^{n} a_j Q(j) \right| \geqslant 1$.

4) Montrer que $|R(j)| \leqslant n e^n \dfrac{(n!)^p}{(p-1)!}$. En déduire que, lorsque p est grand, $\left| \sum_{j=0}^{n} a_j R(j) \right| < 1$ et conclure.

Solution.

1) Par récurrence sur $\deg P$.

2)

3)

4) On majorera P sur $[0, n]$.

□

Exercice 8 (ddl)
Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$$

a) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}, P_k(x) \in \mathbb{Z}$$

c) Trouver tous les polynômes P tels que
$$\forall x \in \mathbb{Z}, P(x) \in \mathbb{Z}$$

Solution. □

Exercice 9 (ddl)
a) Pour $n \in \mathbb{N}$, développer le polynôme
$$(1+X)(1+X^2)(1+X^4)\dots(1+X^{2^n})$$

b) En déduire que tout entier $p > 0$ s'écrit de façon unique comme somme de puissance de 2 : $1, 2, 4, 8, \dots$

Solution. a) Penser à multiplier par $(1-X)$, puis à la série géométrique. b) □

Exercice 10 (ddl)
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \int_k^{k+1} P(t)\,\mathrm{d}t = k+1$$

Solution. Noter Q une primitive de P. Existence + Unicité. Magie des primitives. □

Exercice 11 (ddl)
Soit $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

Exercice 12 (ddl)
Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.
Déterminer le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de $(X\cos t + \sin t)^n$ par X^2+1.

Solution. $\deg R < 2$ et évaluer en les racines. □

Exercice 13 (ddl)
Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{N}$
$$a \mid b \Leftrightarrow X^a - 1 \mid X^b - 1$$

Exercice 14
On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On identifiera un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ à la fonction polynomiale associée sur $\mathbb{R}$.
Enfin, P' et P'' désigneront respectivement les polynômes dérivés de P et P'.
Soit (T_k) la suite de polynômes définie par :
$$T_0 = 1 \quad ; \quad T_1 = X \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$$

Dans tout le problème et sauf avis contraire, n désigne un entier naturel.

1) Déterminer les polynômes T_2, T_3 et T_4.

2) Quel est le degré de T_n et son coefficient dominant ?

3) Étudier la parité de T_n.

4) Calculer $T_n(1)$, $T_n(-1)$ et $T_n(0)$.

5) Montrer que T_n est le seul polynôme qui vérifie :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

6) Dans cette question uniquement, on suppose $n \neq 0$.

a) Pour quelles valeurs de θ a-t-on : $T_n(\cos\theta) = 0$?

b) Montrer alors que T_n possède n racines réelles distinctes dans $[-1, 1]$. Conclure.

7) Déterminer les racines de T_n'.

Exercice 15 (ddl)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\cos\theta) = \cos n\theta$ pour tout θ réel. On le note T_n.
a) Lier T_{n-1}, T_n et T_{n+1}.
b) Donner une équation différentielle vérifiée par T_n.
c) Calculer $T_n^{(k)}(1)$ et $T_n^{(k)}(-1)$.

Exercice 16 (ddl)
Soit P un polynôme de degré $n+1 \in \mathbb{N}^\star$ à coefficients réels possédant $n+1$ racines réelles distinctes.
a) Montrer que son polynôme dérivé P' possède exactement n racines réelles distinctes.
b) En déduire que les racines du polynôme P^2+1 sont toutes simples dans $\mathbb{C}$.

Solution. $\square$

Exercice 17 (ddl)
Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^4 + 12X - 5$ sachant qu'il possède deux racines dont la somme est 2.

Exercice 18 (ddl – X MP)
Soient $\mathbb{K}$ un corps et $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
a) Calculer

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

b) On pose $A(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - a_j)$. Calculer

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A'(a_i)}$$

Exercice 19 (ddl)
Soient a, b, c trois éléments, non nuls et distincts, du corps $\mathbb{K}$.
Démontrer que le polynôme

$$P = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$

peut s'écrire sous la forme $P = \lambda(X-a)(X-b)(X-c) + 1$ où λ est une constante que l'on déterminera.

Exercice 20 (ddl)
Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ vérifie

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

ses racines sont parmi $0, 1, -j, -j^2$. En déduire tous les polynômes solutions.

Exercice 21 (ddl)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que

$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0$$

a) Montrer que si a est racine de P alors a^2 l'est aussi
b) En déduire que $a = 0$ ou bien a est racine de l'unité.

Exercice 22 (ddl)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
a) Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$.
b) En déduire que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.
c) On note $P^{[n]} = P \circ \ldots \circ P$ (composition à $n \geqslant 1$ facteurs).
Etablir que $P(X) - X$ divise $P^{[n]}(X) - X$

Exercice 23
Soit $p_1, \ldots, p_m$, m endomorphismes non nuls de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, m nombres réels deux à deux distincts. Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$$

1) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a : $P(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$

2) En déduire que $\displaystyle\prod_{i=1}^{m} (f - \lambda_i \,\mathrm{id}\,) = 0$.

3) Pour tout entier ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant m$, on considère le polynôme

$$L_\ell = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq \ell}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_\ell - \lambda_j}$$

Montrer que pour tout entier ℓ, tel que $1 \leqslant \ell \leqslant m$, on a $p_\ell = L_\ell(f)$. En déduire que $\mathrm{Im}\,(p_\ell) \subset \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_\ell id)$, puis que les valeurs propres de f sont exactement $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.