Programme de colle Intégration

Classe de MPSI

Lycée du Parc

0.1 Fonctions usuelles

Exercice 1 (ddl)
a) Montrer que, pour tout $x > -1$

$$\ln(1+x) \leqslant x$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

+suivant

Exercice 2 (ddl, Lemme de Gibbs)
a) Justifier

$$\forall x > 0, \ln x \leqslant x - 1$$

b) Soient $(p_1, \ldots, p_n)$ et $(q_1, \ldots, q_n)$ des n-uplets formés de réels strictement positifs vérifiant

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} q_k = 1$$

Etablir

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \ln q_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$$

Dans quel(s) cas y a-t-il égalité ?

Exercice 3 (ddl)
On appelle argument principal d'un complexe z non nul, l'unique $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$ tel que $z = |z|\,\mathrm{e}^{i\theta}$.
Montrer que si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ alors $\theta = 2 \operatorname{Arctan} \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}$ avec $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$.

Exercice 4 (ddl)
Soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.
Montrer que $\operatorname{th}\dfrac{x}{2} = \tan\dfrac{y}{2}$, $\operatorname{th} x = \sin y$ et $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{\cos y}$.

Exercice 5 (ddl)
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kb)$$

Exercice 6 (ddl)
Etablir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)| = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$$

0.2 Intégration

Exercice 7 (ddl)
Déterminer les primitives suivantes : a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{it+1}$ b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^t \cos t \ \mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int t \sin t e^t \ \mathrm{d}t$.

Exercice 8 (ddl)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 9 (ddl, Centrale MP)
a) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Etablir

$$\int_0^\pi t f(\sin t) \ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin t) \ \mathrm{d}t$$

b) En déduire la valeur de

$$I_n = \int_0^\pi \frac{x \sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)} \ \mathrm{d}x$$

Indication : *Couper, combiner, jusqu'à ce que tout se simplifie.*

Exercice 10
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{U})$, et $g : I \to \mathbb{C}$ définie par $g(x) = ib + \displaystyle\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} \ \mathrm{d}t$, où $b \in \mathbb{R}$ est un argument de $f(a)$.

1) Vérifier que g est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

2) Soit $h : I \to \mathbb{C}$ définie par $h(x) = f(x)\exp(-g(x))$. Calculer h' et en déduire h.

3) Montrer qu'il existe une fonction $\theta : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $f = e^{i\theta}$.

Exercice 11 (si théorème compacts fait ?)
Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, et $h(x) = \displaystyle\int_a^b |f(t) + xg(t)| \ \mathrm{d}t$.

1) On suppose $f > 0$, montrer que h admet un minimum local en 0 implique $\displaystyle\int_{[a,b]} g = 0$.

2) Est-ce toujours vrai lorsque l'on suppose $f \geqslant 0$?

Solution.

1) Indication : g continue sur un segment.
$h(0) = \displaystyle\int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t) + xg(t)| \ \mathrm{d}t \qquad \forall |x| \leqslant \varepsilon$ Soit $c = \inf_{[a,b]} f > 0$ et $\varepsilon < c / \sup g$. Alors $f + xg \geqslant 0 \qquad \forall |x| \leqslant \varepsilon$.

2) Contre-exemple : $f = 0$ et $g = 1$.

$\square$

Exercice 12 (Cesàro)

1) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue telle que $\lim_{+\infty} f = \ell$. Montrer que $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{A} \int_0^A f(t) \ \mathrm{d}t = \ell$

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ix^2} \ \mathrm{d}x$ converge et est égal à $e^{i\pi/4}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solution.

1) Comme dans le cas des suites.

2) Passer par I^2 puis étudier le signe de $\Im(I)$.

□

Exercice 13
Soit $h :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = E(2/t) - 2E(1/t)$.

1) Montrer que h est intégrable sur $[\frac{1}{n+1};1]$ pour tout n.

2) Calculer $\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^1 h(t)\,\mathrm{d}t$.

Solution.

2) solution : $2\ln 2 - 1$.

□

Exercice 14 (inégalité de Hardy)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ intégrable et $p \in]1,+\infty[$,

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{+\infty} f(x)^p\,\mathrm{d}x$$

Exercice 15
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

1) À quelles conditions a-t-on $\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

2) Même question si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Solution.

1) Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
Pour tout t, $f(t) \leqslant |f(t)|$, par conséquent $0 \leqslant f(t) - |f(t)|$, d'où

$$\int_{[0,1]} (f - |f|) = 0 \Longrightarrow (f - |f|) = 0$$

Donc $f = |f|$.
En conclusion, la condition est $f = |f|$ ou $f = -|f|$.

2) On s'inspire de la question précédente. Notons θ un argument de $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, et $g = e^{-i\theta} f$.

□

Exercice 16
Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ définie par $f(x) = x_\sigma = \sum_{i\geqslant 0} a_{\sigma(i)} 10^{-i}$ où $x = \sum_{i\geqslant 0} a_i 10^{-i}$ et σ est une permutation fixée.

1) Montrer que f est intégrable.

2) Montrer que $\int_{[0,1]} f = 1/2$.

Exercice 17
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\forall g \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ avec $g(a) = g(b) = 0$, $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Déterminer les f qui conviennent.

Solution. Constantes. □

Exercice 18
Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$ et $0 < f' \leqslant 1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 f^3(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 19 (Irrationalité de π)
Supposons que $\pi = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, et posons $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^\pi x^n(a-bx)^n \sin x\,\mathrm{d}x$. Montrer que la suite (I_n) est composée d'entier et tend vers 0. Conclure.

Exercice 20
Soit $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$ continue par morceaux et $g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ T-périodique. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{[0,T]} g \int_{[a,b]} f$$

Exercice 21 (Théorème de Riemann-Lebesgue)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux, T-périodique, d'intégrale nulle sur une période. Montrer que $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\int_a^b f(t)\varphi(st)\,\mathrm{d}t = 0$.

2) On ne suppose plus que φ est d'intégrale nulle. Déduire de la question précédente que

$$\lim_{s\to+\infty}\int_a^b f(t)\varphi(st)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 22
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $\|f\|_t = \left(\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^t\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{t}}$ pour $t \to \pm\infty$ et $t \to 0$. .

Solution. On trouve $\|f\|_\infty$ pour $+\infty$ □

Exercice 23
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{U})$, et $g : I \to \mathbb{C}$ définie par $g(x) = ib + \displaystyle\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$, où $b \in \mathbb{R}$ est un argument de $f(a)$.

1) Vérifier que g est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

2) Soit $h : I \to \mathbb{C}$ définie par $h(x) = f(x)\exp(-g(x))$. Calculer h' et en déduire h.

3) Montrer qu'il existe une fonction $\theta : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $f = e^{i\theta}$.

0.3 Deuxième période

0.4 Intégration et dérivation

Exercice 24 (ddl)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T > 0$. On suppose que

$$\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = C^{te}$$

Montrer que f est périodique.

Exercice 25 (ddl)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer leur dérivée :

1) $g(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$ **2)** $g(x) = \displaystyle\int_0^x x\,f(t)\,\mathrm{d}t$ **3)** $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$