Programme de colle équations différentielles

Classe de MPSI

Lycée du Parc

Exercice 1 (ddl, ordre 1)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1) $y' + 2y = x^2$ **2)** $y' + y = 2\sin x$ **3)** $y' - y = (x+1)\mathrm{e}^x$

4) $y' + y = x - \mathrm{e}^x + \cos x$ **5)** $(x^2+1)y' + xy = 1$ **6)** $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $]-1,1[$

7) $(\mathrm{e}^x - 1)y' + \mathrm{e}^x y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$

Exercice 2 (ddl, ordre 2)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1) $y'' + y' - 2y = x\mathrm{e}^x$ **2)** $y'' + 2y' + 2y = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$ **3)** $y'' - 3y' + 2y = x\mathrm{ch}x$

4) $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{ch}x$ **5)** $y'' + y = x\sin x$ **6)** $y'' + y = 2\cos^2 x$

7) $(1+\mathrm{e}^x)y'' + 2\mathrm{e}^x y' + (2\mathrm{e}^x + 1)y = x\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$ en posant $z(x) = (1+\mathrm{e}^x)y(x)$.

Exercice 3 (ddl)
Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les fonctions

$$f(x) = \frac{C+x}{1+x^2}$$

seraient les solutions.

Exercice 4 (ddl)
Déterminer les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5 (ddl)
Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue non nulle.
On se propose de montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + p(x)y = 0$ s'annulent.
Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que f est une solution ne s'annulant pas.

1) Justifier que f est de signe constant.
Quitte à considérer $-f$ au lieu de f, on peut supposer $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.

2) Etudier le signe de f''.

3) Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. Quelle est l'équation de la tangente à f en a ?

4) Montrer que le graphe de f est en dessous de sa tangente en a.

5) En déduire que $f'(a) = 0$ et conclure.

Exercice 6 (ddl)
Déterminer f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f'(x) = f(2-x)$$

Exercice 7 (ddl)
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que pour tout x réel

$$f(x) - 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Exercice 8 (ddl)
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \text{ et } f(0) = 1$$

Exercice 9 (ddl)
Déterminer les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in [0,1]\,, f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$