Programme de colle Dérivation

Classe de MPSI

Lycée du Parc

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x + 2x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$.

Étudier la dérivabilité de f, la continuité de f'.

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$.

1) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Calculer f' sur $\mathbb{R}^*$, en déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) On se place sur $]0, +\infty[$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$, la dérivée n-ième de f, est de la forme $P_n(1/x)\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$, où P_n est un polynôme. (sans hypothèse sur $\deg P_n$).

3) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4) Des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support dans un segment.

- **a)** Soit $[a, b]$ un segment. Montrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que g est nulle hors de $]a, b[$, $g > 0$ sur $]a, b[$.
- **b)** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut trouver g vérifiant les hypothèses précédentes et de plus $g = 1$ sur $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Indication : *Penser aux primitives.*

5) Le but de cette question est de trouver des fonctions qui admettent un DL mais ne sont pas $\mathscr{C}^1$.

- **a)** Montrer que $f(x) = o(x^n)$ en $x = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **b)** Construire une fonction g qui admet un DL en 0 à l'ordre n pour tout n et qui n'est pas $\mathscr{C}^1$.
  Indication : *On pourra s'inspirer de la fonction de l'exercice 1.*

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 telle que $\forall x \; f(\dfrac{x}{2}) = \dfrac{1}{2} f(x)$. Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R} \; f(x) = \lambda x$.

Solution. On peut supposer $f'(0) = 0$, quitte à poser $g(x) = f(x) - f'(0)x$. Par conséquent, lorsque $n \to +\infty$, $f(x)/x = f(x2^{-n})/(x2^{-n}) \longrightarrow f'(0) = 0$. □

Exercice 4
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que

$$\forall x \in [a, b] \quad \exists c_x \in]a, b[\quad f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x)$$

Solution. Rolle + Rolle. □

Exercice 5
Soit $f \in \mathscr{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ convexe telle que $f' > 0$, et $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Notons α l'unique racine de $f(x) = 0$.
Posons $u_0 = b$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant \dfrac{1}{c}(c(b-a))^{2^n}$

Exercice 6 (ddl)
Après avoir déterminer le domaine d'existence, calculer les dérivées des fonctions suivantes :
a) $x \mapsto x^x$b) $x \mapsto (\mathrm{ch}x)^x$c) $x \mapsto \ln|x|$

Exercice 7 (ddl)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I qui n'en soit pas une extrémité. Si le rapport

$$\frac{1}{2h}\left(f(a+h) - f(a-h)\right)$$

admet une limite finie quand h tend vers 0, celle-ci est appelée dérivée symétrique de f en a.
a) Montrer que, si f est dérivable à droite et à gauche en a, elle admet une dérivée symétrique en a.
b) Que dire de la réciproque ? Indication : *On pourra regarder* $x \mapsto \sqrt{|x|}$.

Exercice 8 (ddl)
Calculer de deux façons la dérivée n-ème de $x \mapsto x^{2n}$.
En déduire une expression de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Exercice 9 (ddl)
Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Exercice 10 (ddl – Centrale MP)
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$f \circ f = f$$

Solution. Dériver : $f'(x) = f'(x)f'(f(x))$. En remplaçant x par $f(x)$, il vient

$$f'(f(x)) = f'(f(x))^2$$

Donc par continuité (TVI, etc) de $f' \circ f$, $f' \circ f = 0$ ou $f' \circ f = 1$.
Si $f'(f(x)) = 0$, alors (première égalité) $f'(x) = 0$ et $f =$cste.
Si $f'(f(x)) = 1$, on montre que $f(x) = x + C$ puis $= x$ sur un intervalle $I = \mathrm{Im}\, f$ dont on montre qu'il ne peut pas être borné. □

Exercice 11 (ddl)
[Règle de L'Hôpital]
Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que

$$\forall x \in [a, b]\,, g'(x) \neq 0$$

a) Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Exercice 12 (ddl – X MP)
Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose de $f(x) \to \ell$ et $xf'(x) \to \ell'$ quand $x \to 0$.
Que dire de ℓ' ?
Indication : $\ell' = 0$. *Raisonner par l'absurde, en appliquant le TAF entre* x *et* $2x$.

Exercice 13 (ddl – M.-P. MP)
Soient f un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme croissant de $[0,1]$ sur $[0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que l'on peut trouver une suite $(x_{k,n})_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que :

$$\forall k \in \{1,\ldots,n\}\,,\ \frac{k-1}{n} \leqslant f(x_{k,n}) \leqslant \frac{k}{n} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_{k,n})} = n$$

Indication : *Appliquer le TAF à f^{-1} et sommer.*

Exercice 14 (ddl)
Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ s'annulant en $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.
Montrer que pour chaque $x_0 \in [a,b]$, il existe $c \in]a,b[$ vérifiant

$$f(x_0) = \frac{(x_0-a_1)(x_0-a_2)\ldots(x_0-a_n)}{n!} f^{(n)}(c)$$

On pourra, lorsque cela est possible, introduire un réel K tel que

$$f(x_0) = \frac{(x_0-a_1)\ldots(x_0-a_n)}{n!} K$$

et établir que la dérivée n-ième de $x \mapsto f(x) - \dfrac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{n!}K$ s'annule.

Exercice 15 (d'après ddl – M.-P. MP)
Donner l'exercice 3 avant.
Soient des réels a, b où $a \notin \{0,1\}$. On pose $h(x) = ax+b$ pour tout x réel. On note S l'ensemble des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f \circ f = h$$

1) Montrer que $S = \emptyset$ si $a < 0$.Indication : *Étudier l'existence de points fixes pour f et f'.*
Désormais on suppose $a > 0$ (et $a \neq 1$).

2) Montrer que h est une homothétie ; préciser son centre et son rapport.

3) Soit $f \in S$. Montrer que $h^{-1} \circ f \circ h = f$. En déduire une expression de f ; on commencera par le cas $0 < a < 1$.

Exercice 16 (ddl)
Déterminer les développements limités suivants :

1) $DL_3(\pi/4)$ de $\sin x$ **2)** $DL_4(1)$ de $\dfrac{\ln x}{x^2}$ **3)** $DL_5(0)$ de $\mathrm{sh}\,(x)\,\mathrm{ch}\,(2x) - \mathrm{ch}\,(x)$

Exercice 17 (ddl)

1) Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ admet une application réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et former le $DL_5(0)$ de f^{-1}.

2) $DL_7(0)$ de tan via parité + équa diff.

Exercice 18

1) Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto e^{\sin x}$.

2) Faire de même en $\dfrac{\pi}{4}$ pour la fonction $x \mapsto \sqrt{\tan x}$.

3) Donner un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto (1+\sin x)^x$

Solution.

1) $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + O(x^4)$

2) $g(\pi/4+x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{6}x^3 + O(x^4)$

$\square$

Exercice 19 (Limites)
Donner la limite en 0^+ des expressions suivantes :

1) $\dfrac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}$ **2)** $\dfrac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$ **3)** $\dfrac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}} - x}{x(x^x - 1)}$ **4)** $(\cos x)^{\frac{1}{\tan(x^2)}}$ **5)** $\dfrac{\operatorname{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}}$

Donner la limite en $+\infty$ des expressions suivantes :

6) $\left[\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right] \ln x$ **7)** $\left[e - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{1/x}$

Exercice 20
Quelle est la partie entière de $10^{(10^{(10^{(10^{(10^{(-(10^{10}))})})})})} - (10^{(10^{10})})$?

Solution. Message 9259 abm. $\square$

Exercice 21 (ddl)
Former le développement asymptotique en $+\infty$ de l'expression considérée à la précision demandée :
a) $\sqrt{x+1}$ à la précision $\dfrac{1}{x^{3/2}}$
b) $x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$ à la précision $\dfrac{1}{x^2}$
c) $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$ à la précision $\dfrac{1}{x^2}$

Exercice 22 (ddl)
Former le développement asymptotique, en $+\infty$, à la précision $1/n^2$ de

$$u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!$$

Exercice 23
Méthode pour augmenter la précision du DL de tan à l'aide de l'équa diff.
Équivalent en 0 de $\sin(\tan x) - \tan(sinx)$.

Exercice 24
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(e^x - 1)^n$.

1) Équivalent de $(e^x - 1)^n$ en 0.

2) À l'aide de la formule du binôme et d'un DL, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^i = 0 \quad \forall i \in [\![0, n-1]\!] \qquad \text{et} \qquad = n! \quad \text{pour } i = n$$