Programme de colle Convexité

Classe de MPSI

Lycée du Parc

Exercice 1
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, strictement positifs. Montrer que $\dfrac{x_1}{x_2} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}}{x_n} + \dfrac{x_n}{x_1} \geqslant n$.

Solution. On cherche donc à prouver l'inégalité $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x_1}{x_2} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}}{x_n} + \dfrac{x_n}{x_1}\right) \geqslant 1$. On pense donc immédiatement à de la convexité.

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum \frac{x_i}{x_{i+1}}\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum \ln\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = \frac{1}{n}\sum(\ln x_i - \ln x_{i+1}) = 0$$

Ce qui nous donne l'inégalité cherchée lorsqu'on passe aux exponentielles (exp est une fonction croissante).
Autre preuve : réordonnement. $\square$

Exercice 2

1) Montrer qu'une fonction convexe et concave est affine.

2) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x \in]a, b[\ \exists \varepsilon > 0 \ /\ f(x) = \frac{1}{2}(f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon))$$

(où ε est choisi tel que $x + \varepsilon$ et $x - \varepsilon$ restent dans l'intérieur de l'intervalle). Montrer que f est affine.

Solution.

1) Géométriquement immédiat : la courbe est confondue avec ses cordes.

2) Il suffit de montrer que la fonction est convexe — pour obtenir la concavité, on appliquera le résultat à $-f$. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $(u, v, w) \in]a, b[^3$ tel que $u < v < w$ et $\dfrac{f(v) - f(u)}{v - u} > \dfrac{f(w) - f(u)}{w - u}$.
On définit la fonction $h : [u, w] \to \mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - f(u) - (x - u)\left(\dfrac{f(w) - f(u)}{w - u}\right)$. Cette fonction vérifie la même propriété que f, et de plus $h(u) = h(w) = 0$, et par hypothèse $h(v) > 0$. Posons $y = \inf\{x \in [u, w] \mid h(x) = \sup\limits_{[u,w]} h\}$ (il existe par Heine, h étant continue sur un compact), y appartient à $]u, w[$. On a donc $h(y) > h(y - \varepsilon)$ et $h(y) \geqslant h(y + \varepsilon)$ ce qui contredit la propriété vérifiée par h.

$\square$

Exercice 3
Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ convexe. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \frac{1}{2}f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{8}(f'(n) - f'(1))$$

Solution. Pour la première inégalité, c'est simplement une inégalité de convexité (le graphe est sous la corde) suivie d'une intégration.

Pour la seconde, on peut procéder de deux façons, soit géométriquement (la preuve est laissé au lecteur), soit par une intégration par parties.

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\left(t-\left(k+\frac{1}{2}\right)\right) f(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1}\left(t-k-\frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(f(k+1)+f(k)) - \int_k^{k+1}\left(t-k-\frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

De plus f est convexe, donc f' est croissante et par conséquent $f'(t)-f'(k)\geqslant 0$ sur $[k,k+1]$.

$$\int_k^{k+1}\left(t-k-\frac{1}{2}\right)(f'(t)-f'(k))\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k+1/2}^{k+1}\underbrace{\left(t-k-\frac{1}{2}\right)}_{\geqslant 0}(f'(k+1)-f'(k))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}(f'(k+1)-f'(k))$$

Il s'en suit que

$$\frac{1}{2}(f(k+1)+f(k)) - \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_k^{k+1}\left(t-k-\frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{8}(f'(k+1)-f'(k))$$

Ce qui nous donne l'inégalité cherchée. □

Exercice 4
Soit $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, strictement positifs. Pour $\alpha>0$, on pose $M_\alpha((x_i)_i)=\left(\frac{1}{n}\sum_i x_i^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.
Montrer que si $0<\alpha<\beta$ alors $M_\alpha\leqslant M_\beta$. Que valent $\lim_{\alpha\to 0} M_\alpha$ et $\lim_{\alpha\to+\infty} M_\alpha$? Que faire lorsque $\alpha<0$?
<u>Indication</u> : *On pourra se ramener au cas où* $\alpha=1$

Exercice 5 (ddl)
Soit $f: I\to\mathbb{R}$ une application continue strictement décroissante et convexe.
Etudier la convexité de la fonction $f^{-1}: f(I)\to I$.

Exercice 6 (ddl – X MP)
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.

1) On suppose que, pour tout $(x,y)\in I^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Montrer que f est convexe.

2) On suppose qu'il existe un réel M tel que

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, |f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|\leqslant My^2$$

Montrer que f est dérivable.
Indice : Considérer $x\mapsto f(x)\pm Mx^2/2$.

3) Montrer que si f n'est pas supposée continue, mais que pour tout $(x,y)\in I^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}$, f n'est pas forcément convexe (avec des espaces vectoriels).