Programme de colle Complexes et Géométrie plane

Classe de MPSI

Lycée du Parc

Exercice 1
Quels sont les polygones réguliers qui pavent le plan ?

Solution. Soit k le nombre de polygones autour d'un sommet. Au minimum $k = 3$: l'angle au sommet du polygone est $< \pi/2$.
L'angle au sommet le plus petit possible est $\pi/3$ (triangle), donc $k = \dfrac{2\pi}{\pi/3} = 6$ est le maximum possible.
Via l'angle au centre du n-gone (qui vaut $2\pi/n$), l'angle entre deux côtés est de $\pi - 2\pi/n$. Et on veut $k(\pi - 2\pi/n) = 2\pi$. Il faut tester (et trouver n) pour $k \in \{3, 4, 5, 6\}$. $\square$

Exercice 2 (Ménélaüs)

Exercice 3
Soit $z, z' \in \mathbb{U}$ tels que $zz' \neq 1$. Montrer que $\dfrac{z + z'}{1 + zz'} \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (X MP – ddl)
Quelle est l'image du cercle unité (privé de $A(1)$) par l'application $z \mapsto \dfrac{1}{1 - z}$?

Solution. Si $z = e^{i\theta}$, l'image a pour équation $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} i \operatorname{cotan} \dfrac{\theta}{2}$ $\square$

Exercice 5 (ddl)
a) Déterminer le lieu des points M d'affixe z qui sont alignés avec I d'affixe i et M' d'affixe iz.
b) Déterminer de plus le lieu des points M' correspondant.

Solution. a) Cercle de centre $(1 + i)/2$ et de rayon $1/2$. b) $z \mapsto iz$ est la rotation de centre O et d'angle $+\pi/2$. $\square$

Exercice 6 (Term C)
Soit $a \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et f_a définie par

$$z' = (1 + i \tan a)z - i \tan a$$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_a.

2) Soit $M \neq A(1)$. Montrer que si $a \neq 0$, alors AMM' est un triangle rectangle.

3) Soit B un point du plan. Déterminer $\{f_a(B) \mid a \in] - \pi/2, \pi/2[\}$ et $\{f_a^{-1}(B) \mid a \in] - \pi/2, \pi/2[\}$

Exercice 7 (Bac)
Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respective a, b, c, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a + b + c$.

Exercice 8

1) Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que les expressions suivantes soient définies, puis montrer que $\tan(x) = -\dfrac{2}{\tan(2x)} + \dfrac{1}{\tan(x)}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme suivante : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \tan(2^k x)$.

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = \{1, \dots, n\}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $S_2 = \displaystyle\sum_{(i,j)\in I^2} ij$ **2)** $S_3 = \displaystyle\sum_{(i,j)\in I^2} i+j$ **3)** $S_4 = \displaystyle\sum_{(i,j)\in I^2} \inf(i,j)$ **4)** $S_5 = \displaystyle\sum_{(i,j)\in I^2} |i-j|$

Exercice 10

Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_k$. Montrer que $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_k$. <u>Indication</u> :

Exercice 11

À l'aide de la formule du binôme pour $(1+x)^n$, calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ **2)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ **3)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ **4)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$

5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2k\leqslant n} \binom{n}{2k}$ **6)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2k\leqslant n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{2k}$ **7)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$