Programme de colle Calculs

Classe de MPSI

Lycée du Parc

Exercice 1 (ddl)
Résoudre le système d'équations suivant d'inconnues complexes :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & x_{n-2} & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 0 \\ & & & & & & x_{n-1} & + & x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2 (ddl)
Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$, les systèmes suivants d'inconnues complexes :

1) $\left\{\begin{array}{c} x-y+z=m \\ x+my-z=1 \\ x-y-z=1 \end{array}\right.$ **2)** $\left\{\begin{array}{c} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{array}\right.$ **3)** $\left\{\begin{array}{c} mx+y+z+t=1 \\ x+my+z+t=m \\ x+y+mz+t=m+1 \end{array}\right.$

Exercice 3

1) Rappeler l'expression de la dérivée de tangente à l'aide de tangente. Expression de $\text{Arctan}'(x)$ (avec preuve).

2) Soit $F : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $f : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $y' = F(y)$ (où I est un intervalle fixé) :

$$\forall x \in I \qquad f'(x) = F(f(x))$$

On suppose de plus que f est bijective sur son image ($\iff$ injective). Donner l'expression de f'.

3) On suppose que F est à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est forcément bijective sur son image.

4) Retrouver les dérivées de ln, Arcsin (Arccos), Argsh.

Exercice 4
Tableau de variations complet des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$ **2)** $f_2(x) = xe^x - e^x + 1$ **3)** $f_3(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 5 (ddl)
Soit $0 < a \leqslant b$. On pose $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Etudier la monotonie de f et en déduire que $\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2$.

Exercice 6 (ddl)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$.
b) Déterminer, pour $y \in]-1, 1[$ une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de $f(x)$.

Exercice 7 (ddl)
Branches infinies de $f(x) = \dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{\ln x}$ et $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{|x-1|+x}$