Programme de colle Arithmétique

Classe de MPSI

Lycée du Parc

1 Ensembles finis, $\mathbb{N}$

Exercice 1 (ddl)
Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$. Trouver un tel x, avec $x \notin \mathbb{Z}$.

Exercice 2 (X 2013)
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$. Montrer qu'il existe $J \subset [\![1, n]\!]$, non vide, telle que $n | \sum_{i \in J} x_i$. Indication : *Tiroirs*

Exercice 3 (ddl)
Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $n \in [\![0, p+q]\!]$. Proposer une démonstration par dénombrement de l'égalité

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}$$

Exercice 4 (ddl)
Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs n et p.
On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F.
a) Calculer S_n^1, S_n^n et S_n^p pour $p > n$.
b) On suppose $p \leqslant n$ et on considère a un élément de E.
On observant qu'une surjection de E sur F réalise, ou ne réalise pas, une surjection de $E \setminus \{a\}$ sur F, établir $S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p)$.
c) En déduire que $S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

Exercice 5 (ddl, X MP)
Soit E un ensemble. Montrer que E est infini si, et seulement si, pour toute fonction $f : E \to E$, il existe $A \subset E$ avec $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$ telle que $f(A) \subset A$.

Indication : *Direct : regarder $\{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$. Réciproque : par contraposée.*

Exercice 6
Montrer que la seule fonction $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ qui vérifie $f(n+1) > f(f(n))$ pour tout n est l'identité.

Solution. Montrer par récurrence sur n que $f(m) \leqslant n \Longrightarrow m \leqslant n$. □

Exercice 7
Soit D_n le nombre de dérangements, i.e. le nombre de permutations sans points fixes de n éléments.

1) Calculer $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$.

2) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = n!$

3) En déduire que $D_n = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Solution.

1) $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$. Donc $= 0$ sauf pour $p = 0$, où $= 1$.

2) On prend une permutation, et on regarde son nombre k de points fixes.

3) Par récurrence.

$\square$

Exercice 8
Mêmes notations que le précédent.

1) Montrer que $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$.

2) $\forall n \geqslant 2$, $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

3) En déduire D_n en fonction de n.

Solution.

1) Poser $F_k = \{\sigma \in \mathscr{D}_n \mid \sigma(n+1) = k\}$. Deux cas : $k = n+1$ (on retrouve D_n), ou $k \leqslant n$ (on recolle $\sigma^{-1}(n+1)$ sur $\sigma(n+1)$).

$\square$

2 Dénombrement

Exercice 9
Soit R_n le nombre de relation d'équivalence sur E de cardinal n. Montrer que $R_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} R_k$.

Exercice 10

1) Quel est le nombre de fonctions strictement croissantes de $\{1 \ldots n\}$ dans $\{1 \ldots m\}$?

2) Et de fonctions croissantes au sens large ?

Solution.

1) A toute partie à n éléments de $\{1 \ldots m\}$ on peut associer une unique fonction strictement croissante (en rangeant les éléments par ordre croissant). Par conséquent le nombre de fonctions strictement croissantes de $\{1 \ldots n\}$ dans $\{1 \ldots m\}$ est C_n^m

2) Soit $S_{n,m}$ le nombre de fonctions croissantes. En distinguant suivant que $f(1) = 1$ ou $f(1) \geqslant 2$, nous obtenons la relation de récurrence suivante : $S_{n,m} = S_{n-1,m} + S_{n,m-1}$. Par conséquent $S_{n,m} = C_{m+n-1}^m$.

$\square$

Exercice 11
Calculer $S = \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \cdots + \binom{p}{p}$. <u>Indication</u> : $\binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 12
Soit E fini de cardinal n. Calculer

$$\sum_{A \in \mathscr{P}(E)} \operatorname{Card} A \qquad \sum_{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2} \operatorname{Card}(A \cap B) \qquad \sum_{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2} \operatorname{Card}(A \cup B)$$

Solution. $\displaystyle\sum_{A\in\mathscr{P}(E)} \operatorname{Card} A = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

$\operatorname{Card}\{(X,Y) \mid Z = X\cap Y\} = \displaystyle\sum_{p=k}^{n}\binom{n-k}{p-k}2^{n-p} = 3^{n-k}$ Avec $\operatorname{Card} Z = k$. □

Exercice 13
Montrer que pour tout n-uplet d'entier, il existe deux de ces entiers dont la différence est divisible par $n-1$.

Solution. Il suffit d'appliquer le « principe des tiroirs » : si on considère les restes $r_1, \dots r_n$ de ces entiers par la division par $n-1$, il y a au plus $n-1$ valeurs possibles. Donc deux entiers x_i et x_j auront le même reste modulo $n-1$, par conséquent $x_i - x_j$ sera divisible par $n-1$. □

3 Arithmétique

Exercice 14 (ddl)
a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un couple unique $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

b) Calculer $a_n^2 - 2b_n^2$.
c) En déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 15 (ddl)
Soient $a, b \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$.
On suppose que $a^n + b^n$ est un nombre premier. Montrer que n est une puissance de 2.

Exercice 16 (X 2013)
Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(f(n)) = n + 2013$.

Solution. Dans un premier temps, on montre que $f(n+2013k) = f(n)+2013k$. On en déduit une application $\overline{f}$ sur $\mathbb{Z}/2013\mathbb{Z}$ involutive, or $\mathbb{Z}/2013\mathbb{Z}$ a un nombre impair d'éléments : $\overline{f}$ a un point fixe. remonter à f et conclure. □

Exercice 17
Montrer que 2012 a un multiple qui ne s'écrit qu'avec des 4.

Solution. Après simplification par 4, il faut montrer que 503 a un multiple qui ne s'écrit qu'avec des 1, c'est-à-dire qu'il existe k tel que $\displaystyle\sum_{0}^{k-1} 10^i = (10^k-1)/9 = 0[503]$. $9 \wedge 503 = 1$ (critère somme des chiffres), donc l'égalité précédente équivaut à $10^k = 1[503]$, petit théorème de Fermat (vu que $10 \wedge 503 = 1$). □

Exercice 18 (Olympiades internationales 1979)
Soit $S = \dfrac{p}{q} = \displaystyle\sum_{k=1} 1319\frac{(-1)^k}{k}$ (avec $p\wedge q = 1$). Montrer que $1979|p$.

Solution. Remarquons d'abord que 1979 est premier, donc on peut se placer dans $\mathbb{Z}/1979\mathbb{Z}$ pour calculer S ($1978!$ est inversible dans $\mathbb{Z}/1979\mathbb{Z}$).
Il n'y a pas d'élément d'ordre 2 pour l'addition dans $\mathbb{Z}/1979\mathbb{Z}$, donc $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}/1979\mathbb{Z}} k = 0$. De plus $\mathbb{Z}/1979\mathbb{Z}$ est un corps, donc $x \mapsto 1/x$ est une bijection de $(\mathbb{Z}/1979\mathbb{Z})^\times$, et on a aussi

$$\sum_{k=1}^{1978}\frac{1}{k} = 0$$

Il reste à faire le calcul, en remarquant que $1979 - 1320 = 659$.

$$S = S + \sum_{k=1}^{1978} \frac{1}{k} = 2\sum_{k=1}^{659} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1320}^{1978} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{659} \frac{1}{k} + \sum_{k'=1}^{659} \frac{1}{-k'} = 0$$

On peut remplacer 1979 par n'importe quel p premier tel que $p-2$ soit divisible par 3. □

Exercice 19
Trouver tous les coloriages des entiers strictement positifs en noir et blanc pour lesquels la somme de deux entiers de couleur différente est noire et que leur produit est blanc.

Solution. Tester sur des exemples. Les coloriages sont exactement de la forme $p.\mathbb{N}$ blanc et le reste noir. □

Exercice 20 (ddl)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} j^p$.
En déduire : $A = \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k}$, $B = \sum_{k=0}^{E((n-1)/3)} \binom{n}{3k+1}$ et $C = \sum_{k=0}^{E(n-2/3)} \binom{n}{3k+2}$.
Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k}$$

Exercice 21 (X 2011 OT – ddl)
On considère la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

1) Montrer que $u_{n+m} = u_m u_{n+1} + u_{m-1} u_n$. En déduire que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on a $p|n \Longrightarrow u_p|u_n$.

2) Montrer que $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$.

3) Montrer que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on a $u_{p \wedge n} = u_p \wedge u_n$.

Solution.

1) $n = kp$ et récurrence sur k.

2)

3) Algorithme d'Euclide.

□