Programme de colle Fourier

Classe de MP*

Lycée du Parc

Exercice 1
Montrer qu'il n'existe pas de fonction 2π-périodique continue par morceaux telle que sa série de Fourier soit $\sum \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$.

Exercice 2
Soit $\theta \in]0, \pi[$. Soit f la fonction 2π-périodique paire donnée par

$$\begin{cases} f(x) &= 1 \quad \text{si } x \in [0, \theta] \\ f(x) &= 0 \quad \text{si } x \in]\theta, \pi] \end{cases}$$

1) Tracer f sur $[-\pi, \pi]$.

2) Développer la fonction f en série de Fourier.

3) Étudier la convergence de la série de Fourier.

4) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ pour $\theta \in]0, \pi[$, puis pour $\theta \in]\pi, 2\pi[$.

Exercice 3
Soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^1$.

1) Déterminer les coefficients de Fourier de f en fonction de ceux de f'.

2) On suppose que plus $a_0(f) = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{2\pi} (f'(x))^2 \,\mathrm{d}x$.

Exercice 4

1) Décomposer en éléments simple la fraction rationnelle $\dfrac{1}{5 + 2(X + \frac{1}{X})}$.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{5 + 4\cos x}$. À l'aide d'une série entière, développer f en série de Fourier. <u>Indication</u> : *Écrire* $\cos x$ *avec des exponentielles, et utiliser 1).*

3) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{5 + 4\cos x} \,\mathrm{d}x$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5
Déterminer, pour $a > 0$, le développement en série de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,(a) - \cos(x)}$.
En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{\mathrm{ch}\,(a) - \cos x} \,\mathrm{d}x$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6
Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on note

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

Soit $A, B \in \mathbb{R}_+$.

1) Trouver toutes les fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall \xi \notin]-A, A[\quad \widehat{f}(\xi) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \notin]-B, B[\quad f(x) = 0$$

2) Trouver toutes les fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall \xi \notin]-1/2, 1/2[\quad \widehat{f}(\xi) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{Z},\ |k| \geqslant 2 \quad f(k) = 0$$

Exercice 7 (ddl)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 2π périodique, paire, telle que

$$\forall x \in [0, \pi]\,, f(x) = x$$

a) Calculer la série de Fourier de f.
b) Etudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier de f.
c) Déterminer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

d) En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Exercice 8 (ddl)
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π périodique définie par

$$\forall x \in]-\pi, \pi]\,, f(x) = \mathrm{e}^x$$

a) Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f.
b) En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Exercice 9 (ddl)
Existe-t-il une suite (α_n) de réels telle que

$$\forall t \in [0, \pi]\,, \sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos(nt)?$$

[oui, puis les calculer.]

Exercice 10 (ddl)
f désigne une fonction réelle continue et 2π périodique sur $\mathbb{R}$.
a) Démontrer que la suite de fonction $(F_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \int_0^n f(x+t) f(t)\, \mathrm{d}t$$

converge vers une fonction F.
On précisera la définition de F en fonction de f ainsi que le mode de convergence de la suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$
b) Démontrer

$$\|F\|_\infty \leqslant F(0)$$

Exercice 11 (ddl – Inégalité de Sobolev)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que

$$\|f\|_\infty^2 \leqslant \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} \left(f'(t)\right)^2\,\mathrm{d}t$$

Exercice 12

1) Soit $\varphi(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ si $0 < t < \pi$ et $\varphi(0) = 0$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi[$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin(nt)\,\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de I_n puis calculer $I_{n+1} - I_n$.
En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) En déduire que $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ admet une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

Exercice 13
Soit f paire 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0, \pi] \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

But : la série de Fourier de f converge simplement vers pour tout $x \in \mathbb{R}$ vers $f(x)$.

1) Peut-on conclure immédiatement, pourquoi ?

2) Soit G la primitive de $x \mapsto \sin(x^2)$ s'annulant en 0. Montrer à l'aide d'une IPP que G admet une limite finie et positive en $+\infty$.

3) Soit $a_n = \dfrac{2}{\pi} \ldots$ le coefficient de Fourier de f. Montrer que $a_n \sim \dfrac{D}{n^{\frac{3}{2}}}$.

4) En déduire que la série de Fourier de f converge vers $f(x)$ pour tout x.

Exercice 14
Soit $E = \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$. Pour $I \subset \mathbb{Z}$ on pose $A_I = \{f \in E \mid \forall n \in I, c_n(f) = 0\}$
On dit que $A \subset E$ est stable par translation si $f \in A \implies \forall h \in \mathbb{R} f(. + h) \in A$.
Montrer que les sous-espace vectoriels fermés stables par translation sont les A_I.

Solution. Soit $I = \cap_{f \in A}(n \mapsto c_n(f))^{-1}$. Par définition, $A \subset A_I$ et A_I sous-espace vectoriel (comme intersection de noyaux) fermé (comme intersection de fermés).
On montre que $e_n \in A$ pour tout $n \in I$, puis on conclue par linéarité plus densité.
Quitte à multiplier regarder $e_{-n}A$, on peut supposer que $n = 0$.
Par hypothèse $c_0(f) \neq 0$ (ops $= 1$), et on approche $e_0 = c_0(f)$ par somme de Riemann, car $f(x + \dfrac{2k\pi}{p}) \in A$.
$\square$

Exercice 15
Soit $E = \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$. Soit $T > 0$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ défini par $\varphi(f)(x) = f(x + T)$.
Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de φ.