Programme de colle Espaces vectoriels

Classe de MP*

Lycée du Parc

0.1 Généralités

Exercice 1
$M = (\binom{j}{i})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$, où $\binom{j}{i} = 0$ lorsque $j < i$.

1) Calculer M^p. On pourra regarder une application linéaire bien choisie dans $\mathbb{K}_n[X]$.

2) Valeurs propres, sous-espaces propres (regarder $P_i(X) = \binom{X}{i} = \dfrac{X(X+1)\dots(X+i-1)}{i!}$).

Exercice 2
Caractériser $GL_n(\mathbb{Z})$ à l'aide du déterminant.

Exercice 3
Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathbb{C}$ alors elles le sont dans $\mathbb{R}$.

Solution. Se débarrasser des P^{-1} dans la formule, et écrire $P = R + xQ$. Via le déterminant, prouver qu'il existe un x qui convient. □

Exercice 4 (Dualité)
Soit $\mathbf{k}$ un corps, $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{F}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$. Montrer que

$$(f_1, \dots, f_n) \text{ libre } \iff \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{k}^n / \ (f_i(x_j))_{ij} \in GL_n(\mathbf{k})$$

Solution. Réciproque par contraposition.
Sens direct (à détailler !) : poser $F = \text{Vect}\,((f_i)_i)$ et montrer que F^* est engendré par les $e_a : f \mapsto f(a)$ pour $a \in \mathbf{k}$. En extraire une base. hop. □

Exercice 5
Soit $n \geqslant 2$. Montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbf{k})$ coupe $GL_n(\mathbf{k})$.

Solution. Montrer que $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbf{k}) \to \mathscr{M}_n(\mathbf{k})^*$ définie par $\varphi(A) : X \mapsto \text{Tr}\,(AX)$ est bijective.
Si $H = \text{Ker}\ f$ est un hyperplan, regarder $\varphi^{-1}(f)$. □

Exercice 6 (ddl)
Soient $f_1, \dots, f_n$ et f des formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que

$$f \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_n) \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}\ f_i \subset \text{Ker}\ f$$

Solution. Sens direct immédiat.
Réciproquement. Si $(f_i)_i$ n'est pas libre, on extrait (ce qui ne change pas $\bigcap \text{Ker}\ f_i$) jusqu'à ce qu'elle soit libre. On complète en une base $(f_1, \dots, f_N)$ de E^*. Alors $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i$. Montrons que $\lambda_i = 0$ si $i > n$.

Soit (e_i) la base antéduale : $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. Donc les $e_{n+1}, \dots, e_N$ sont dans $\bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker } f_i \subset \text{Ker } f$.

Donc, en évaluant en $e_{n+1}, \dots, e_N$, $\lambda_i = 0$ pour $i > n$.
En dimension infinie : récurrence sur n. On suppose $f \neq 0$.
Pour $n = 1$ c'est du cours. Pour $n \to n+1$, on restreint le problème à Ker f_{n+1}. On applique l'hypothèse de récurrence. On trouve $f - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i$ nulle sur Ker f_i, on applique le cas $n = 1$. $\square$

Exercice 7 (ddl)
Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel, $\dim E = n < \infty$.
Soit $u_1, \dots, u_n$ dans $\mathscr{L}(E)$ nilpotents qui commutent deux à deux. Que vaut $u_1 \circ \cdots \circ u_n$.

Solution. Zéro. Poser $F_k = \text{Im}\,(u_k \circ \cdots \circ u_n)$. La suite de sous-espace vectoriel (F_k) est strictement décroissante (jusqu'à $\{0\}$) : $u_{k-1|F_k}$ n'est pas bijectif, car nilpotent. $\square$

Exercice 8 (Moyenne, conjugaison)
Soit E un espace vectoriel.

1) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $g \in GL(E)$ et F sous-espace vectoriel de E. Montrer que F stable par u implique $g(F)$ stable par gug^{-1}. Puis que $F = E_\lambda(u)$ si et seulement si $g(F) = E_\lambda(gug^{-1})$.

2) On suppose que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et $\dim E = n \geqslant 1$. Soit $G \subset GL(E)$ un sous-groupe fini. On note
$$E^G = \{x \in E \mid \forall g \in G, g(x) = x\} = \bigcap_{g \in G} \{\text{points fixes de } g\}$$
Montrer que E^G est un sous-espace vectoriel de E et que $\dim E^G = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}\,(g)$.

Indication : *faire la moyenne des $g \in G$. $E^G = E_1(u)$.*

3) On suppose que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et $\dim E = n \geqslant 1$. Soit $G \subset GL(E)$ un sous-groupe fini. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par tout g de G.
Montrer qu'il existe un supplémentaire stable par tout g de G.
Indication : *Combiner les deux idées précédentes : faire la moyenne des conjugués d'un projecteur sur F.*

Exercice 9

1) Soit E, F et G trois espaces vectoriel. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(E, G)$.
CNS pour $\exists h \in \mathscr{L}(F, G)$ telle que $g = h \circ f$.

2) Soit E, F et G trois espaces vectoriel. Soit $f \in \mathscr{L}(F, E)$ et $g \in \mathscr{L}(G, E)$.
CNS pour $\exists h \in \mathscr{L}(G, F)$ telle que $g = f \circ h$.

3) $u \in \mathscr{L}(E)$ passe au quotient $\widetilde{u} : E/F \to E/F$ si et seulement si $u(F) \subset F$.

4) Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$. Monter que
$$\text{rg } g \leqslant \text{rg } f \iff \exists h \in GL(F),\ \exists k \in \mathscr{L}(E) /\ hg = fk$$

Solution.

1) Inverser f en cassant $E = E_0 \oplus \text{Ker } f$ et $F = \text{Im } f \oplus F_0$. CNS : Ker $f \subset$ Ker g.

2) Dual.

$\square$

Exercice 10
Soit E, E' et F des $\mathbf{k}$-espaces vectoriels. Si $u \in \mathscr{L}(E, E')$ on note $\varphi_u = \mathscr{L}(u, F) : \mathscr{L}(E', F) \to \mathscr{L}(E, F)$ et $\psi_u = \mathscr{L}(F, u) : \mathscr{L}(F, E) \to \mathscr{L}(F, E')$.

1) Montrer que u bijective si et seulement si pour tout F, φ_u bijective.

2) Montrer que u bijective si et seulement si pour tout F, ψ_u bijective.

3) Montrer que $\mathscr{L}(F, \text{Ker } u) \simeq \text{Ker}\,(\mathscr{L}(F,u))$ et que $\mathscr{L}(\text{Coker } u, F) \simeq \text{Ker}\,(\mathscr{L}(u,F))$.

Exercice 11 (Suite des $\text{Ker } u^k$**,** $\text{Im } u^k$**)**
Soit E un espace vectoriel, $\dim E = n$, $u \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que $(\text{Im } u^k)_k$ et $(\text{Ker } u^k)_k$ sont strictement monotone puis constante à partir d'un même rang p.

2) $(\text{Ker } u^k)_k$ s'essouffle : $(\dim \text{Ker } u^{k+1} - \dim \text{Ker } u^k)_k$ décroissante.

3) Montrer que $E = \text{Ker } u^p \oplus \text{Im } u^p$. En déduire qu'il existe un base de E telle que $\text{Mat}\,(u, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où N nilpotente et C inversible.

Exercice 12 (Idéaux de $\mathscr{L}(E)$**)**

1) Bilatères. Balader un 1 partout dans une matrice : tout et $\{0\}$.

2) à gauche. En bijection avec les sous-espace vectoriel F via $\text{Ker } u \supset F$.

3) à droite. En bijection avec les sous-espace vectoriel F via $\text{Im } u \subset F$.

0.2 Diagonalisation

Exercice 13 (X – ddl)
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est nilpotente et qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $B = AP(A)$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 1$ et $A = BQ(B)$.

Solution. Écrire les B^k comme combinaison linéaire des $A^k, \dots, A^{p-1}$, puis inverser le système d'équations obtenues. □

Exercice 14 (Mines-Ponts – ddl)
Soit f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.
a) Montrer que f est nilpotent.
b) On suppose $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base e de E et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\text{Mat}_e f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Mat}_e g = \text{diag}(\lambda, \lambda+1, \dots, \lambda+n-1)$$

Solution.

1) Montrer (E) : $f^k g - g f^k = k f^k$. Regarder les valeurs propres de $h \mapsto hg - gh$.

2) Soit $x \notin \text{Ker } f^{n-1}$. $\mathscr{B} = (f^{n-1}(x), \dots, f(x), x)$ est une base de E, et

$$\text{Ker } f^k = \text{Vect}\,(f^{n-k}(x), \dots, f^{n-1}(x))$$

D'après (E), $f^{n-1}(g(x)) - g(f^{n-1}(x)) = (n-1) f^{n-1}(x)$
Donc $g(f^{n-1}(x)) \in \text{Ker } f = \text{Vect}\,(f^{n-1}(x))$, ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$g(f^{n-1}(x)) = \lambda f^{n-1}(x)$$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On évalue (E) : $f^k g = g f^k + k f^k$ en $f^{n-1-k}(x)$:

$$f^k(g(f^{n-1-k}(x))) = g(f^{n-1}(x)) + k f^{n-1}(x) = (\lambda + k) f^{n-1}(x)$$

D'où $g(f^{n-1-k}(x)) = (\lambda + k)f^{n-1-k}(x) + z$ avec $z \in \text{Ker } f^k = \text{Vect}\,(f^{n-k}(x), \dots, f^{n-1}(x))$.

Donc la matrice de g dans $\mathscr{B}$ est triangulaire avec $\lambda, \dots, \lambda + k, \dots, \lambda + n - 1$ sur la diagonale. Ainsi, g laisse stable le drapeau des Ker f^k.

Désormais, on « remonte ». Soit y un vecteur propre pour $\lambda + n - 1$.

Si $y \in \text{Ker } f^{n-1}$, alors y est un vecteur propre de $g_{|\text{ Ker } f^{n-1}} : \text{Ker } f^{n-1} \to \text{Ker } f^{n-1}$ (g laisse stable Ker f^{n-1}). Ce qui est impossible au vu de la matrice de g dans $\mathscr{B}$.

Ainsi $f^{n-1}(y) \neq 0$ et y nous fourni un « nouvel » x : soit $e = (f^{n-1}(y), \dots, x)$. En utilisant (E), il vient

$$\begin{array}{rcl} g(y) & = & (\lambda + n - 1)y \\ \dots & & \\ g(f^k(y)) & = & -kf^k(y) + f^k(g(y)) = (\lambda + n - k - 1)f^k(y) \\ \dots & & \end{array}$$

Donc la matrice de g est diagonale dans cette nouvelle base.

□

Exercice 15
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

Montrer que

$$\text{sp}(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$$

Exercice 16 (produit tensoriel – CCP MP – ddl)
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit $A \star B \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{C})$ par

$$A \star B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix}$$

a) Montrer que si $A, A', B, B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors $(A \star B)(A' \star B') = (AA') \star (BB')$.
b) En déduire que $A \star B$ est inversible si, et seulement si, A et B sont inversibles.
c) Déterminer le spectre de $A \star B$.
En déduire le polynôme caractéristique, la trace et le déterminant de $A \star B$.

Exercice 17
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et Φ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\Phi_A(M) = AM$.
a) Montrer que les valeurs propres de Φ_A sont les valeurs propres de A.
b) Déterminer les valeurs propres de $\Psi_A : M \mapsto MA$.

Exercice 18
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(I_n + A\bar{A})$ est réel, puis positif.

Solution. Méthode 1 : supposer A inversible, montrer que λ valeur propre de $A\bar{A}$ entraîne $\bar{\lambda}$ valeur propre de $A\bar{A}$, exprimer le déterminant avec les valeurs propres. Conclure avec $A + \dfrac{1}{k}I_n \to A$ qui sera inversible.
Méthode 2 : Via $\text{Tr}\,(B^k)$.
Méthode 3 : $\chi_{MN} = \chi_{NM}$, densité. □

Exercice 19 (matrices circulantes)

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \ddots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$.

1) Donner le polynôme minimal de J (<u>Indication</u> : *Regarder* J^n *puis* $P(J)$ *pour* $\deg P \leqslant n-1$), en déduire le polynôme caractéristique de J. Diagonaliser J sur $\mathbb{C}$.
2) Montrer que A est un polynôme en J et diagonaliser A sans calculs.

Exercice 20
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On suppose que u^2 est diagonalisable. CNS pour que u soit diagonalisable ?

Exercice 21
Soit $M = (a_i a_j)_{ij}$. Donner les valeurs propres et vecteurs propres de M.

Solution.$M = X^t X$ donc de rang 1. Conclure avec la trace. □

Exercice 22
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, où E est de dimension finie. Soit $\varphi_u : v \mapsto uv$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si φ_u est diagonalisable.

Solution. Polynôme minimal. □

Exercice 23 (Dunford)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1) Soit $P \in \mathbf{k}[X]$ un polynôme annulateur de u, de décomposition en facteurs irréductibles $P = \beta \prod_i Q_i^{\alpha_i}$.
Pour tout i, on note $F_i = \operatorname{Ker} Q_i^{\alpha_i}(u)$.
Montrer que $E = \bigoplus_i F_i$ et que pour tout i, la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} F_j$ est un polynôme en u.
2) On suppose que χ_u est scindé sur $\mathbf{k}$. Montrer qu'il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tels que d est diagonalisable, n est nilpotente, d et n commutent et $u = d + n$. De plus, d et n sont des polynômes en u.

Solution.

1) Lemme des noyaux. Bezout sur $(\prod_{j \neq i} Q_j^{\alpha_j})$.
2) $d = \sum_i \lambda_i (U_i P_i)(u)$ et $n = u - d$.

□

Exercice 24
Soit $\mathbf{k}$ un corps fini à q éléments, E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que $\forall x \in \mathbf{k}$, $x^q = x$.
2) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^q = f$.

Solution.

1) $\mathbf{k}^*$ est un groupe multiplicatif à $q - 1$ éléments.

2) $X^q - X$ est scindé à racines simples (via 1), on a ses racines), et l'ensemble de ses racines est $\mathbf{k}$. Sens direct : $P_{\min}$ est scindé à racines simples, donc divise $X^q - X$. Réciproque : évidente.

$\square$

Exercice 25

Soit $\mathscr{A}$ une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbf{k})$, dont tous les éléments sont nilpotents.

1) Étudier $x \neq 0$ tel que $\dim\{Ax \mid A \in \mathscr{A}\}$ soit minimale. Trouver un $x \in \bigcap_{A \in \mathscr{A}} \operatorname{Ker} A$.

2) Par récurrence montrer qu'il existe une base commune de trigonalisation.

Solution.

1) $\mathscr{A}x = \{0\}$, sinon $\exists A \in \mathscr{A}$, $Ay = y$. Donc A avec une valeur propre non nulle.

2) Regarder la base $(x, e_1, \ldots, e_{n-1})$, puis l'algèbre $\mathscr{B}$ des blocs B : $A = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$

$\square$

Exercice 26

Suites de Dunford

1)

2)