Programme de colle Courbes

Classe de MP*

Lycée du Parc

Exercice 1 (PT C 2010 partie C / E3A PSI 2011)
Le plan euclidien étant rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on considère la courbe Γ dont les équations paramétriques sont

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{t-t^3}{1+t^2}$$

1) Étude et tracé de Γ.

- **a)** Donner une interprétation géométrique du paramètre réel t. On pourra essayer de relier x, y et t.
- **b)** Montrer que Γ possède un axe de symétrie que l'on précisera.
- **c)** Dresser le tableau des variations des fonctions x et y.
- **d)** Donner l'équation de l'asymptote de Γ.
- **e)** Calculer les coordonnées des points où la tangente à Γ est verticale ou horizontale.
- **f)** Montrer que Γ possède un point double que l'on précisera (c'est-à-dire un point du plan correspondant à deux valeurs du paramètre t).
- **g)** Quel angle forment les tangentes à Γ au point double ?
- **h)** Tracer Γ.

2) Former une équation cartésienne de Γ. (Indication : *On pourra utiliser 1)a).*) *(remarque : une telle équation de degré 3 définit une courbe dite cubique, qui sont des courbes fort intéressantes)*

3) On considère la droite Δ d'équation $ux + vy + w = 0$.

- **a)** Montrer que le point $M \in \Gamma$ de paramètre t appartient à Δ si et seulement si

$$vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w) = 0$$

- **b)** En notant t_1, t_2 et t_3 les racines de cette équation et en utilisant

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w) = v(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)$$

  donner la valeur de $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1$.
- **c)** En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que trois points de Γ, de paramètres t_1, t_2 et t_3 soient alignés.

4) Soit le point $A(1,0)$ de Γ. Une droite issue de A recoupe Γ en deux points M_1 et M_2 de paramètres respectifs t_1 et t_2.

- **a)** Quel est le paramètre du point A ?
- **b)** Quelle relation vérifient t_1 et t_2 ?
- **c)** Que peut-on dire des droites (OM_1) et (OM_2) ?
- **d)** Montrer que le cercle de diamètre $[M_1M_2]$ est tangent à l'axe Ox.

5) Soit S un point de paramètre t_0.

- **a)** Quelle est l'équation qui donne les paramètres des points de contact M' et M'' des tangentes à Γ issues de S ? À quelle condition sur t_0 ces points existent-ils ?
- **b)** La droite $(M'M'')$ recoupe Γ au point P. Quelle est, en fonction de t_0, le paramètre du point P ?

c) Que peut-on dire des droites (OP) et $(M'M'')$?

Solution.

1) **a)** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = tx(t)$. Donc $\boxed{\text{Le paramètre } t \text{ représente la pente de la droite } (OM(t)).}$

b) Le changement de t en $-t$ change (x, y) en $(x, -y)$. Par conséquent Γ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

c) Les fonctions x et y sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, car les dénominateurs des fractions rationnelles ne s'annulent pas. On restreint l'étude à $[0, +\infty[$.

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x'(t) = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} \qquad \text{et} \qquad y'(t) = \frac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2}$$

Le numérateur de $y'(t)$ est bicarré et se factorise en

$$1 - 4t^2 - t^4 = -(t^2 + 2 + \sqrt{5})(t^2 + 2 - \sqrt{5}) = -(t^2 + 2 + \sqrt{5})(t - t_0)(t + t_0)$$

où $\boxed{t_0 = \sqrt{\sqrt{5} - 2}}$. Le tableau de variation est donc le suivant :

- $$\begin{aligned} x(t_0) &= \frac{1 - (\sqrt{5} - 2)}{1 + \sqrt{5} - 2} \\ &= \frac{(3 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})}{5 - 1} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$
- $y(t_0) = t_0 x(t_0)$

t	0		t_0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$-$		$-$	
x	1	$\searrow$		$\searrow$	-1
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$y(t_0)$	$\searrow$	$-\infty$

d) Lorsque t tend vers $+\infty$, y tend vers $-\infty$ et x tends vers -1. C'est la seule limite infinie. Donc $\boxed{\text{la droite d'équation } x = -1 \text{ est asymptote à } \Gamma \text{ pour } y \to \pm\infty.}$

e) Tous les points sont réguliers, donc la tangente est horizontale lorsque $y'(t) = 0$, c'est-à-dire $t = \pm t_0$, ce qui correspond au point de coordonnées $\boxed{(x(t_0), y(t_0))}$ et à son symétrique par rapport à (Ox).

De même, la tangente est verticale pour $x'(t) = 0$, c'est-à-dire $t = 0$, qui correspond à $\boxed{(1, 0)}$.

f) On cherche t_1 et t_2 tels que $t_1 \neq t_2$, $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$. Si on complète le tableau de variations de x, on constate que $x(t_1) = x(t_2)$ implique $t_2 = -t_1$ (et $t_1 \neq t_2$ équivaut à $t_1 \neq 0$). Cherchons $t_1 > 0$ tel que $y(t_1) = y(-t_1)$, c'est-à-dire

$$y(t_1) = \frac{t_1 - t_1^3}{1 + t_1^2} = \frac{-t_1 + t_1^3}{1 + t_1^2} = y(-t_1)$$

Ainsi, en résolvant, $2t_1(1 - t_1^2) = 2t_1(1 - t_1)(1 + t_1) = 0$, c'est-à-dire $t_1 = 1$.

La courbe Γ possède un unique $\boxed{\text{point double en } (0, 0).}$

g) D'après 1)c), $\begin{cases} x'(1) = -\dfrac{4}{2^2} = -1 \\ y'(1) = \dfrac{1 - 4 - 1}{2^2} = -1 \end{cases}$ et par symétrie $\begin{cases} x'(-1) = 1 \\ y'(-1) = -1 \end{cases}$

Comme le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul, donc les tangentes à Γ au point double forment $\boxed{\text{un angle droit.}}$

h) Tracer Γ.

2) Raisonnons par double inclusion.
Si $M(x,y) \in \Gamma$, alors $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = \dfrac{t-t^3}{1+t^2}$, donc $y = tx$. En particulier, lorsque $x \neq 0$, $t = \dfrac{y}{x}$. En remplaçant dans l'expression de x on obtient $x = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, puis en multipliant par x^2+y^2 il vient

$$(E) \qquad \boxed{x^3 + xy^2 - x^2 + y^2 = 0}$$

On avait exclu les points d'abscisse nulle, c'est-à-dire le point $(0,0)$, or $(x,y) = (0,0)$ vérifie bien (E). On a donc $\Gamma \subset \Gamma_{(E)}$.
Réciproquement, soit $M(x,y)$ dont les coordonnées vérifient (E). Pour $x \neq 0$, posons $t = \dfrac{y}{x}$.
Comme (E) équivaut à $x = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, on trouve

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad y = tx = \frac{t-t^3}{1+t^2}$$

c'est-à-dire $M \in \Gamma$. De plus $x = 0$ implique $y = 0$, d'après (E) ; qui est dans Γ (par exemple pour $t = 1$). Ainsi $\Gamma_{(E)} \subset \Gamma$.
Conclusion : par double inclusion, $(E) : x^3 + xy^2 - x^2 + y^2 = 0$ est une équation cartésienne de Γ.
(remarque : une telle équation de degré 3 définit une courbe dite cubique, qui sont des courbes fort intéressantes)

3) **a)** Les coordonnées de $M \in \Gamma$ vérifient $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $y = \dfrac{t-t^3}{1+t^2}$. L'équation de Δ s'écrit donc

$$u\frac{1-t^2}{1+t^2} + v\frac{t-t^3}{1+t^2} + w = 0$$

En multipliant par $-(1+t^2) \neq 0$ il vient $\boxed{vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w) = 0}$

b) On utilise les relations entre coefficients et racines. Id est, si on développe le membre de droite (avec les racines) et qu'on identifie les coefficients de chaque coté, on obtient

$$\begin{cases} v = v & \text{(coefficient devant } t^3) \\ u - w = -v(t_1+t_2+t_3) & \text{(coefficient devant } t^2) \\ -v = v(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1) & \text{(coefficient devant } t^1 = t) \\ -(u+w) = -vt_1t_2t_3 & \text{(coefficient devant } t^0 = 1) \end{cases}$$

Donc lorsque $v \neq 0$, il vient $\boxed{t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1}$

c) Trois points sont alignés si et seulement si ils sont sur une même droite, c'est-à-dire, s'ils vérifient une même équation $ux + vy + w = 0$. Supposons ces points sur Γ.
D'après le tableau de variations, la droite ne peut être verticale, donc $v \neq 0$. D'après 5)a) et 5)b), dans ce cas, $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1$.
Réciproquement, supposons que $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1 = -1$. Considérons la droite $\Delta = (M(t_1)M(t_2))$, et notons $ux + vy + w = 0$ son équation.
Par définition, $M(t_1) \in \Delta$ et $M(t_2) \in \Delta$, donc t_1 et t_2 sont des racines de l'équation trouvée au 5)a). En notant τ la troisième racine (nécessairement réelle puisque les deux précédentes le sont), le 5)b) nous dit que $t_1t_2 + t_2\tau + \tau t_1 = -1$. Par construction, $M(\tau)$ est sur $\Delta = (M(t_1)M(t_2))$.
Il nous reste à prouver que le point $M(\tau)$ est confondu avec $M(t_3)$. La différence des deux équations

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1 \qquad \text{et} \qquad t_1t_2 + t_2\tau + \tau t_1 = -1$$

nous donne $(t_3 - \tau)(t_1 + t_2) = 0$. Si $t_1 = -t_2$, alors $M(t_1)$ est le symétrique de $M(t_2)$ par rapport à (Ox), et la droite $\Delta = (M(t_1)M(t_2))$ est verticale, ce qui est exclu. Donc la seule possibilité est que $\tau = t_3$, et donc $M(t_3) \in \Delta = (M(t_1)M(t_2))$.
Conclusion : $\boxed{t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que trois points de Γ, de paramètres t_1, t_2 et t_3 soient alignés.

4) **a)** $x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = 1$ entraîne $1-t^2 = 1+t^2$ puis $t=0$. Donc $\boxed{A \text{ est de paramètre } t=0.}$

b) D'après 5)b), $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1$, avec $t_3 = 0$, donc $\boxed{t_1t_2 = -1}$

c) D'après 1)a), la droite (OM_1) a pour pente t_1 et la droite (OM_2) pour pente t_2. Or d'après 6)b), $t_1t_2 = -1$. Donc $\boxed{\text{les droites } (OM_1) \text{ et } (OM_2) \text{ sont perpendiculaires}}$

d) Le triangle OM_1M_2 est rectangle en O, donc O est sur le cercle de diamètre $[M_1M_2]$. Il reste à montrer que l'axe (Ox) est tangent.
Si on note Ω le centre du cercle, milieu du segment $[M_1M_2]$, l'axe (Ox) est tangent si (Ox) est perpendiculaire à (ΩO), c'est à dire si $\Omega \in (Oy)$. La condition analytique est donc $x(t_1)+x(t_2) = 0$, elle s'écrit $t_1^2t_2^2 = 1$ après calculs. Ce qui est vrai d'après 6)b).
Ainsi, $\boxed{\text{Le cercle de diamètre } [M_1M_2] \text{ est tangent à l'axe } (Ox).}$

5) **a)** La droite Δ passe par $S(t_0)$ et $M(t)$ (point double : elle y est tangente à Γ) si et seulement si $2t_0t + t^2 = -1$ (5)c)). L'équation cherchée est donc

$$\boxed{t^2 + 2t_0t + 1 = 0}$$

Cette équation a deux solutions réelles distinctes si et seulement si $\Delta = 4t_0^2 - 4 > 0$ c'est-à-dire

$$\boxed{t_0 \notin [-1, 1]}$$

Donc pour S hors de la boucle.

b) Le point $P(t)$ vérifie, d'après 5)b), $t't''+tt'+tt'' = -1$. Or t' et t'' sont les racines de $t^2+2t_0t+1 = 0$: leur somme vaut $-2t_0$ et leur produit 1. Ainsi, en remplaçant, il vient

$$1 - 2t_0t = -1$$

En résolvant, on trouve $\boxed{t = 1/t_0}$.

c) D'après 7)a), on vu que $t't'' = 1$ donc $t'' = 1/t'$. Ainsi $x(t'') = -x(t')$ et $y(t'') = t''x(t'') = -t''x(t')$.
La droite $(M'M'')$ a pour pente $\dfrac{y(t'') - y(t')}{x(t'') - x(t')} = \dfrac{-t'' - t'}{-2} = \dfrac{1}{2}(t'' + t') = -t_0$ d'après les relations coefficients racines.
Or, d'après 1)a) et 7)b), la droite $(OM(t))$ a pour pente $t = 1/t_0$.
Conclusion : $\boxed{\text{Les droites } (OP) \text{ et } (M'M'') \text{ sont perpendiculaires.}}$

$\square$

Exercice 2 (E3A PC 2012)
Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\mathscr{D}$ la courbe d'équation paramétrique :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 3 - 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) & = & 2\sin(t) - \sin(2t) \end{array} \right.$$

1) Symétries. Points singuliers, allure au voisinage des points singuliers (tangentes, position). Montrer que les tangentes aux points singuliers passent par $\Omega = (3, 0)$.

2) Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles de centre Ω et de rayons respectifs $R_1 = 3$ et $R_2 = 1$.
Déterminer $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_2 \cap \mathscr{D}$. Montrer que $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}_2$.

3) Tracer dans $\mathscr{P}$ les courbes $\mathscr{D}$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et T.

4) Montrer que la courbe $\mathscr{D}$ est invariante par la rotation de centre Ω et d'angles $\dfrac{2\pi}{3}$.

5) Calculer la longueur de $\mathscr{D}$.

Exercice 3
Déterminer les droites à la fois tangentes et normales à la courbe $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3t^2 \\ y & = & 2t^3 \end{array} \right.$ Asymptotes.

Exercice 4 (PT 2006 — Partie A)
On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble d'équation

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

1) Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$? Donner un paramétrage de $\mathscr{E}$.

$$x(t) = 3\cos t \qquad \text{et} \qquad y(t) = 2\sin t$$

2) Déterminer le repère de Frenet de cet arc au point $M(t)$, puis le rayon de courbure en ce point.

3) En déduire les coordonnées du centre de courbure de $\mathscr{E}$ associé au point $M(t)$.

4) On désigne par Γ l'arc paramétré comme suit ($t \in \mathbb{R}$) :

$$x(t) = \frac{5}{3}\cos^3 t \qquad \text{et} \qquad y(t) = -\frac{5}{2}\sin^3 t$$

Γ' est l'arc de Γ correspondant à $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. En étudiant les fonctions x et y, construire avec soin Γ' ; on précisera les tangentes aux extrémités de Γ'.

5) Par quelles transformations géométriques déduit-on la construction de Γ de celle de Γ' ? Construire Γ sur la même figure.

6) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ intérieure à la courbe fermée Γ.

Exercice 5
Le plan euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1) Soit Γ la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto M(t)$:

$$\begin{cases} x(t) &= 2\,\mathrm{ch}\,(t) \\ y(t) &= 3\,\mathrm{sh}\,(t) \end{cases}$$

a) Montrer que Γ est une portion de conique dont on précisera la nature et l'excentricité.

b) Former une équation cartésienne de chacune des asymptotes de Γ. Tracer proprement la courbe Γ et ses asymptotes.

2) On note Γ' la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto C(t)$:

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{13}{2}\,\mathrm{ch}^3(t) \\ y(t) &= -\frac{13}{3}\,\mathrm{sh}^3(t) \end{cases}$$

a) Montrer que Γ' possède un axe de symétrie.

b) Étudier la courbe Γ' au point $C(0)$.

c) Étudier les branches infinies de Γ' et comparer leurs directions à celles des asymptotes de Γ.

d) Tracer Γ' sur la même figure que Γ.

e) Montrer les relations

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\,(2t) &= \mathrm{ch}^2(t) + \mathrm{sh}^2(t) = 2\,\mathrm{ch}^2(t) - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2(t) + 1 \\ \mathrm{sh}\,(2t) &= 2\,\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{ch}\,(t) \end{aligned}$$

En déduire la longueur $\displaystyle\int_0^1 \|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}t}\|\,\mathrm{d}t$ de l'arc Γ' entre $t = 0$ et $t = 1$.

Exercice 6
Soit $\mathscr{C}$ la courbe définie implicitement par l'équation

$$x^y y^x = y^y \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

1) Pour tout réel $t > 0$, étudier l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec la droite D_t d'équation $y = tx$. En déduire un paramétrage de la courbe $\mathscr{C}$. (On vérifiera que tous les points de $\mathscr{C}$ ont été paramétrés).

2) Étudier les variations de x et y en fonction de t.

3) Étudier les branches infinies de $\mathscr{C}$.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Solution.

1) L'équation s'écrit $y \ln x + x \ln y - y \ln y = 0$. En remplaçant y par tx il vient

$$tx \ln x + (1-t)x \ln(tx) = tx \ln x + (1-t)x \ln t + (1-t)x \ln x = 0$$

Après simplification ($x \neq 0$), on trouve $\boxed{x = e^{(t-1)\ln t}}$ et $\boxed{y = tx = e^{t \ln t}}$.

L'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec la droite D_t d'équation $y = tx$ est donc réduite à un point.

Par construction, les points de coordonnées $(e^{(t-1)\ln t}, e^{t\ln t})$ sont sur la courbe $\mathscr{C}$.

Réciproquement, on remarque que les droites $(D_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$ balayent tout le quart de plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$, donc aucun point de $\mathscr{C}$ ne nous a échappé.

En conclusion, les formules précédentes forment un paramétrage de $\mathscr{C}$.

2) Les fonctions x et y sont dérivables sur R_+^*, et

$$x'(t) = \Big(-\frac{1}{t} + 1 + \ln t\Big)e^{(t-1)\ln t} \qquad \text{et} \qquad y'(t) = (1 + \ln t)e^{t \ln t}$$

La fonction $g(t) = -\dfrac{1}{t} + 1 + \ln t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (dérivée) et $g(1) = 0$. Ainsi,

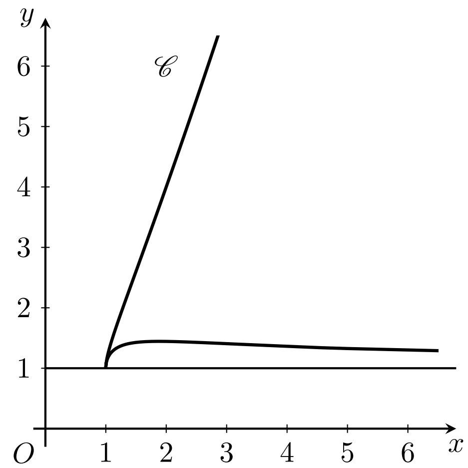
- $x(1/e) = e^{1-\frac{1}{e}}$
- $y(1/e) = e^{-\frac{1}{e}}$

t	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$x'(t)$	‖		$-$		0	$+$	
x	$+\infty$	↘	$x(1/e)$	↘	1	↗	$+\infty$
$y'(t)$	‖	$-$	0		$+$		
y	1	↘	$y(1/e)$	↗	1	↗	$+\infty$

3) Au voisinage de $t = 0$, la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$. La courbe est situé sous l'asymptote.

Lorsque $t \to +\infty$: $\dfrac{y}{x} = t \to +\infty$, donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction $(0y)$.

4) Tracé (il faudrait placer le point $(x(1/e), y(1/e))$ (tangente horizontale) et $(1, 1)$ (tangente verticale).



□

Exercice 7
Étudier la courbe paramétrée définie par $x(t) = \dfrac{t+1}{t(t-1)}$ et $y(t) = \dfrac{t(t+1)}{t-1}$. Expliciter $x(1/t)$ et $y(1/t)$.