Lycée Lavoisier
Mathématiques Spéciales PC

Année scolaire 2007/2008

Semaine 21
22 mars 2010

1 Programme de Colles

1.1 Séries entières

- Rayon de convergence et propriétés
- Développement d'une fonction en série entière

1.2 Séries de Fourier

- Coefficients de Fourier
- Convergence en moyenne quadratique
- Convergence ponctuelle

1.3 Courbes planes

- Courbes paramétrées
- Courbes en coordonnées polaires
- Longueur d'un arc paramétré
- Abscisse curviligne
- Rayon de courbure

2 Exercices

2.1 Séries entières

Exercice 1
Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum \frac{2^n}{n!}x^n$.

Solution. $R = +\infty$ et $f(x) = e^{2x}$. □

Exercice 2
Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum \frac{n^3+2n+1}{n!}x^n$.

Solution. $R = +\infty$. Décomposer n^3+2n+1 dans la base $(n(n-1)(n-2), n(n-1), n, 1)$. On trouve $f(x) = x^3e^x + 3x^2e^x + 3xe^x + e^x$. □

Exercice 3
Développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{x}$ au voisinage de $x = 3$.

Solution. Poser $x = 3 + z$. □

Exercice 4
Développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{3-4x+x^2}$ au voisinage de $x = 0$.

Solution. Décomposer en éléments simples : $\frac{1}{3-4x+x^2} = \frac{1}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x-1)}$. Puis développer les deux séries géométriques. $\square$

Exercice 5

$$\begin{aligned} A(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \cdots + \left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1} - \frac{x^{3n+2}}{3n+2}\right) + \ldots \\ B(x) &= 1 - x + x^3 - x^4 + \cdots + x^{3n} - x^{3n+1} + \ldots \end{aligned}$$

1. Rayon de convergence, puis comportement aux bornes, de A et B.
2. Calculer la somme de B puis de A.

Solution.

1. En regardant $u_{n+1}(x)/u_n(x)$ on trouve $R_A = R_B = 1$. Le critère des séries alternées montrer la convergence aux deux bornes pour A (en -1 on somme par paquet puis on constate que $S_{2n} - S_{2n+1}$ tend bien vers 0). Le terme général de B ne tend pas vers 0 lorsque $x = 1$ ou $x = -1$.
2. $B(x) = \frac{1}{1-x^3} - \frac{x}{1-x^3}$ puis on intègre pour obtenir A.

$\square$

Exercice 6
Série entière $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Rayon de convergence
2. Calculer la somme de f', en déduire f.
3. Convergence normale de la série sur $[-1;1]$, en déduire la valeur de $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Solution.

1. $R = 1$.
2. $f'(x) = \ln(1+x^2)$. On intègre par partie f' pour obtenir f, on trouve du arctangente.

$\square$

Exercice 7
Soit $P(u) = au^2 + bu + c$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Notons $a_n = \frac{P(n)}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Montrer qu'il existe f et g deux polynômes de degré inférieur ou égal à 2 tel que

$$\sum a_n x^n = \frac{f(x)\ln(1-x) + g(x)}{x^3}$$

Solution. $\square$

Exercice 8
Soit $(a_n)_n$ une suite complexe telle que le rayon R de convergence de la série entière associée soit strictement positif.

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière
$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$$
2. On note, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$F(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$$
Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$,
$$\int_0^{+\infty} e^{-t} F(tz)\, \mathrm{d}t$$
existe et que
$$\int_0^{+\infty} e^{-t} F(tz)\, \mathrm{d}t = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

Exercice 9
Résoudre l'équation différentielle $2xy'' + y' - y = 0$.

Solution. □

2.2 Séries de Fourier

Exercice 10
1. Développer en série de Fourier la fonction $f(t) = |\sin(t)|$.
2. En déduire les valeurs de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Solution.
1. La fonction f est paire donc $b_n = 0$, et on trouve $a_{2n+1} = 0$, $a_{2n} = -\frac{\pi/4}{4n-1}$ (pour $n \geq 1$).
2. La fonction f est $\mathscr{C}^0$ et $\mathscr{C}^1$ par morceau, donc sa série de Fourier converge et a pour limite f. Ce qui nous donne les valeurs des deux premières séries. Pour la dernière, on utilise Parseval-Bessel.

□

Exercice 11
Montrer qu'il n'existe pas de fonction 2π-périodique continue par morceaux (intégrable sur une période) telle que sa série de Fourier soit $\sum \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$.

Solution. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'une telle fonction existe. Le seul résultat que l'on a est l'égalité de Parseval-Bessel, qui nous dit que $\|f\|_2 = \left(\sum |c_n|^2\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\sum(a_n^2 + b_n^2)\right)^{1/2}$. Or ici $\|f\|_2$ est fini mais $a_n^2 = 1/n$ donc $\sum(a_n^2 + b_n^2)$ ne l'est pas. □

Exercice 12
Soit f la fonction paire 2π-périodique définie par $f(t) = \sqrt{t}$ sur $[0, \pi]$.
1. Montrer que f est continue mais n'est pas $\mathscr{C}^1$ par morceaux.
2. Développer f en série de Fourier autant que possible et montrer que $a_n = O(n^{-3/2})$.
3. Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Solution.

2. Pour montrer que $a_n = O(n^{-3/2})$, il suffit de faire une IPP puis de comparer l'intégrale restante, en $\int_0^{n\pi} \sin(t)/\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ avec la série alternée.
3. Comparaison avec une série de Riemann.

□

2.3 Courbes planes