Lycée Lavoisier
Mathématiques Spéciales PC

Année scolaire 2007/2008

Semaine 15
29 janvier 2008

1 Programme de Colles

1.1 Équations différentielles

1.1.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

- Étude générale
- Cas particulier des équations scalaires
- Systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

1.1.2 Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre

1.1.3 Équations différentielles du premier ordre

- Théorème de Cauchy Lipschitz
- Cas des équations a variables séparées

1.2 Espaces pré-hilbertiens

1.2.1 Espaces pré-hilbertiens réels

- Produit scalaire
- Orthogonalité
- Projecteurs orthogonaux
- Espaces euclidiens

1.2.2 Cas des espaces pré-hilbertiens complexes.

1.2.3 Étude des endomorphismes dans les espaces vectoriels euclidiens

- Endomorphismes orthogonaux
- Endomorphismes autoadjoints

1.2.4 Équation réduite d'une conique

2 Exercices

Exercice 1
Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall\ x \in E$, $(u(x)|x) = 0$
Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus_{\perp} \operatorname{Im} u$. et que le rang de u est pair.

Exercice 2
On considère $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.
Soit $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.
Dans la base canonique :

1. Déterminez la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F.
2. Donner l'expression de la distance d'un vecteur x à F.

Exercice 3
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $(A|B) = \mathrm{tr}(A^t B)$ défini un produit scalaire sur E.
   On considère par la suite que E est muni de ce produit scalaire.
2. Soit $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les applications $\varphi_P : A \mapsto AP$ et $\psi_P : A \mapsto P^{-1}AP$ sont orthogonales.
3. Réciproquement, si φ_P (resp. ψ_P) appartient à $\mathscr{O}_n(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, peut-on affirmer que $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 4
Soit Γ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

1. Si $M(x, 0)$, avec $x \geq 0$, montrer qu'il existe un unique point $M'(x', 0)$ avec $x' > x$ tel que le carré dont une diagonale est (MM') ait ses deux sommets sur Γ. Expliciter $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $f(x) = x'$.
2. Soit alors $x_0 \geq 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $x_n \to +\infty$ et donner un développement asymptotique à deux termes de (x_n).

Exercice 5
Soit E un un espace préhilbertien réel (de dimension quelconque). On suppose qu'il existe n vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tels que, pour tout $x \in E$, on ait $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i|x_i)^2$.

1. Montrer que les vecteurs e_k , sont deux à deux orthogonaux.
2. Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ forment une base orthonormale de E.

Exercice 6
Soit E un espace préhilbertien complexe. Montrer que :

$$\forall (u, v) \in E^2 \qquad (u|v) = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - (1+i)\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

Exercice 7
Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E. On pose $\|f\| = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \mid x \in E, x \neq 0\right\}$.
Montrer que $\|f\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ désignent les valeurs propres de f.

Exercice 8
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Quelle est la dimension de E ?
Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixés. Pour tout couple $P, Q \in E$, on note $\varphi(P, Q) = \sum_k P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Montrer qu'il existe une base $(P_k)_k$ orthonormée échelonnée. Calculer $P_k^{(j)}(a_j)$.
3. Trouver cette base orthonormée dans le cas ou tous les a_k sont nuls.

Solution.

1. Il faut montrer que φ est bilinéaire, symétrique et défini positif. Les deux premières propriétés sont immédiates : φ est bilinéaire par linéarité de la dérivation et de l'évaluation en un point, et symétrique par symétrie du produit sur $\mathbb{R}$.
   Si $P \in E$, $\varphi(P, P) = \sum_k P^{(k)}(a_k)^2$ est une somme de carrés, donc positive, et nulle si et seulement si tous les carrés sont nuls, c'est-à-dire si $\forall k\ P^{(k)}(a_k) = 0$. Pour montrer que cette dernière condition entraîne $P = 0$, il faut se souvenir que P est de degré au plus n, donc $P^{(n)}$ est une constante, qui est nulle puisque $P^{(n)}(a_n) = 0$. Ainsi P est de degré au plus $n-1$, et on conclue par une récurrence immédiate.
2. Le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique nous donne une base orthonormée échelonnée.
3.

$\square$

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que deux des propriétés suivantes entraînent la troisième.

1. $f^2 = -\operatorname{Id}$.
2. f est une isométrie.
3. $\forall x \in E \ (x|f(x)) = 0$.

Solution. $\square$

Exercice 10

Soit $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ intégrables. Notons $A = (a_{i,j}) = \int_{[a,b]} f_i f_j$. Montrer que $\det A \geq 0$.

Solution. $\square$