Lycée Lavoisier
Mathématiques Spéciales PC

Année scolaire 2007/2008

Semaine 13
14 janvier 2008

1 Programme de Colles

1.1 Intégrale sur un segment des fonctions à valeur dans un EVN

- Intégrale des fonctions en escalier.
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux.
- Calcul des intégrales.
- Formules de Taylor.
- Développements limités.

1.2 Équations différentielles

1.2.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

- Étude générale.
- Cas particulier des équations scalaires.
- Systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

1.2.2 Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre

1.2.3 Équations différentielles du premier ordre

- Théorème de Cauchy Lipschitz.
- Cas des équations a variables séparées.

2 Exercices

Exercice 1

1. Résoudre $y' = \frac{y}{x}$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^*$.
2. Résoudre $y' + 3y = x$.
3. Résoudre $y' = e^{-x} + e^{y-x}$.

Solution.

1. $f(x) = C_1 x$ pour $x > 0$ et $f(x) = C_2 x$ pour $x < 0$.
2.
3.

□

Exercice 2
Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre.

1. $y'' - y' - 6y = (16x - 8)e^{-x}$
2. $y'' - 5y' + 4y = e^{4x} \cos x$
3. $y'' + \lambda y = 0$ et $y(0) = y(1) = 0$. A quelles conditions sur λ y a-t-il des solutions non identiquement nulles ?

Solution. 179 □

Exercice 3
Résoudre $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + my = 0$. On pourra poser le changement de variables $x = \tan t$.

Solution. L'intervalle d'étude est $I = \mathbb{R}$. En posant $z(t) = y(\tan t)$, on remarque que z vérifie l'équation différentielle $z'' + mz = 0$. $\square$

Exercice 4
Étudions l'équation différentielle suivante :

$$(1-\cos 4x)y'' + 2(\sin 4x)y' - 8y = 0$$

1. Quelle est la nature de l'ensemble des solutions ?
2. Résoudre l'équation en sachant qu'il existe deux solutions inverses l'une de l'autre.

Solution.
1. Les intervalles d'étude sont les $I_n =]n\frac{\pi}{2};(n+1)\frac{\pi}{2}[$, $n \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions sera un sous espace vectoriel de dimension 2 : il suffit donc de trouver deux solutions non colinéaires pour résoudre l'équation différentielle.
2. Soit f une fonction définie sur I_n telle que f et $1/f$ sont solution de l'équation différentielle. En remplaçant y par $1/f$, on obtient, après simplifications, l'équation suivante :
$$\frac{f'^2}{f^2} = \frac{4}{\sin^2 2x}$$
Or $\sin 2x$ est de signe constant sur I_n, on peut donc prendre les racines carrés sans inquiétudes, et on trouve finalement $f(x) = C \tan x$ (ou cotan$x$).

$\square$

Exercice 5
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Résoudre le système différentiel
$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 3y(t), \\ y'(t) = 2x(t) + 2y(t). \end{cases}$$

Exercice 6
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Calculer la matrice e^{2I_3+A}.
3. Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 7
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{3}(f(x) + f(0))$.

Solution. On suppose $x \neq 0$, $f(x) = -f(0) + \frac{3}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ donc f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, on peut donc dériver et obtenir l'équation différentielle suivante

$$f' = \frac{2}{x}f - \frac{f(0)}{x}$$

qui a pour solution $f(x) = \frac{1}{2}f(0) + Cx^2$. Un passage à la limite en 0 termine l'exercice. $\square$

Exercice 8 (hors programme)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ dérivables telles que $f'(x) = f(1/x)$.

Solution. On se ramène, en dérivant, à l'équation $f'' = -\frac{1}{x^2} f$. Solutions en x^z et $x^{\overline{z}}$, où $z = e^{2i\pi/3}$.
$\square$