Lycée Lavoisier
Mathématiques Spéciales PC

Année scolaire 2007/2008

**Semaine 11**
8 janvier 2008

# 1 Programme de Colles

## 1.1 Réduction des endomorphismes

- Sous espaces stables, polynômes d'endomorphismes
- Réduction d'un endomorphisme ou d'une matrice
- Pratique de la réduction et applications

## 1.2 Intégrale sur un segment des fonctions à valeur dans un EVN

- Intégrale des fonctions en escalier
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux
- Calcul des intégrales
- Formules de Taylor
- Développements limités

# 2 Exercices

## 2.1 Réduction

**Exercice 1**
Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagnon.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & & & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

**Solution.** Remarquer que $P(M) = 0$. □

**Exercice 2**
On note $A$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser $A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. En déduire l'anticommutant de $A$, c'est-à-dire

$$\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM + MA = 0\}$$

**Solution.**

1.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calculer dans la base de diagonalisation. On trouve $\{0\}$.

$\square$

**Exercice 3**
Calculer le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres des matrices suivantes et diagonaliser, lorsque c'est possible, ces matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 2.2 Intégration

**Exercice 4**
Déterminer, sur $\mathbb{R}_+^*$, une primitive de

$$\frac{1}{(x+1)^7 + x^7 + 1}$$

**Solution.** Décomposition en éléments simples.

$$F(x) = \frac{1}{7}\left(\ln\frac{x}{x+1} - \frac{10}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}) - \frac{2}{3}\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\right)$$

$\square$

**Exercice 5**
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^{3x}\sin^2 x}$$

1. Calculer $I_k = 2e^{(k+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^{3k\pi}\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$
2. Quelle est la nature de la série de terme général $I_k$ ?
3. Montrer que $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

**Solution.**

1. Changement de variable $t = \tan x$. On obtient $I_k = \frac{\pi e^{(k+1)\pi}}{\sqrt{1+e^{3k\pi}}}$.
2. Équivalent, comparer à une série géométrique.
3. Comparer à la série des $I_k$.

$\square$

## 2.3 DL

**Exercice 6**
Montrer que $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ est $C^\infty$ en 0. Quel est son développement limité ?

**Solution.** Il suffit de montrer que $f^{(n)}(x) = P(1/x)e^{-1/x^2}$, où $P$ est un polynôme. $\square$

**Exercice 7**
Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^4}\left(e^{-\tan x} + \cos(\ln(1+x)) + x - 2\right)$$

Quelle est la limite de $f$ en $0$ ? (indication : Calculer le DL à l'ordre 4 en 0 de $f$).

**Solution.** On a $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$. Par conséquent

$$\exp(-\tan x) = \exp\left(-x\left(1 + \frac{x^2}{3} + o\left(x^3\right)\right)\right) = ...$$

$\square$

**Exercice 8**
DL à l'ordre 4 en $\frac{\pi}{4}$ de $f(x) = (\tan x)^{\tan 2x}$.

**Solution.** $\tan 2x = \frac{-1}{\tan 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$ et $f(x) = \exp((\tan 2x)\ln(\tan x))$. $\square$