Lycée Lavoisier
Mathématiques Spéciales PC

Année scolaire 2007/2008

Semaine 7-8
2 décembre 2007

1 Programme de Colles

- Étude générale de la continuité
  - Limite et continuité en un point
  - Opérations sur les limites en un point
  - Caractérisation séquentielle de la continuité
  - Relations de comparaison
  - Applications continues sur un domaine
- Continuité des applications linéaires
  - Étude de la continuité d'une application linéaire
  - Continuité des applications bilinéaires
- Compacité
  - Parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie
  - Image d'une partie compacte par une application continue
- Dérivation des fonctions de variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel normé
  - Dérivée du premier ordre
  - Dérivée d'ordre supérieur
  - Fonctions trigonométriques et leurs inverses
  - Fonctions convexes

2 Exercices

Exercice 1
Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé. Montrer que $\overline{A}$ et $\mathring{A}$ sont convexes.

Solution. Soit $(x,y) \in \overline{A}^2$, montrons que $[x,y] \subset A$. On utilise la caractérisation séquentielle de l'adhérence : soit (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de A qui convergent respectivement vers x et y. La démonstration revient à intervertir deux quantificateurs $\forall$, et faire un passage à la limite :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}\ [x_n, y_n] \subset A &\implies \forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in [0,1]\ tx_n + (1-t)y_n \in A \\
&\implies \forall t \in [0,1]\ \forall n \in \mathbb{N}\ tx_n + (1-t)y_n \in A \\
&\implies \forall t \in [0,1]\ tx + (1-t)y \in \overline{A} \quad \text{(par définition de l'adhérence)} \\
&\implies [x,y] \subset \overline{A}
\end{aligned}$$

□

Exercice 2
Soit (x_n) une suite à valeur dans un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Montrer que si (x_n) n'a qu'une seule valeur d'adhérence, alors x_n converge.

Solution. Notons x l'unique valeur d'adhérence. Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons $A_\varepsilon = \{x_n \mid |x_n - x| > \varepsilon\}$. Si cet ensemble est fini pour tout $\varepsilon > 0$, alors la suite converge vers x. Sinon, pour un $\varepsilon > 0$ qui convient, A_ε est infini et (suite dans un compact $[a,b]$) on peut en extraire une sous-suite convergente. La limite de cette sous suite sera au moins à une distance ε de x, et donc sera une seconde valeur d'adhérence de la suite (x_n). D'où une contradiction. □

Exercice 3
Deux exercices du même type :

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue telle que f tend vers 0 lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Montrer que f est bornée. On suppose de plus que $f(0) = -1$, montrer que f atteint sa borne inférieure.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue telle que f tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

Solution. Écrire la limite en $+\infty$ avec $\varepsilon = 1/2$ et utiliser la compacité de la boule $B(0, A)$ restante pour conclure. Pour montrer que f est minorer, remarquer que l'inf ne peut pas être atteint hors de la boule. □

Exercice 4
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 2$. On note $A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid P(M) = 0\}$.
Démontrer que A est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et non compact.

Solution. L'application polynomiale $P : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est continue, donc $A = P^{-1}(\{0\})$ est fermée comme image réciproque d'un fermé par une application continue. □

Exercice 5
Soit $f : K \to K$ vérifiant $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tout (x, y), où K est une partie compacte d'un espace vectoriel normé. Montrer qu'il existe un unique point fixe.

Solution.

□

Exercice 6
E métrique.

1. (a) K_1 et K_2 compacts, montrer que $d(K_1, K_2)$ est atteinte.
   (b) K compact, F fermé tel que $K \cap F = \emptyset$, montrer que $d(K, F) \neq 0$. Que se passe-t-il si K est seulement fermé ?
2. F non compact, E espace vectoriel normé de dimension finie.
   (a) Soit $f : F \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que la borne inférieure de f sur F est atteinte.
   (b) Monter $\exists x \in F\ \exists y \in F\ d(x, y) = d(K, F)$. Que se passe-t-il en dimension infinie ?

Solution.

□

Exercice 7 (hors programme)
Montrer que $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue est uniformément continue.

Solution. De tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous recouvrement fini. □

Exercice 8
une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe majorée est constante.

Solution.

□

Exercice 9
Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs, montrer que $\frac{x_1}{x_2} + \cdots + \geq n$.

Solution. La fonction exponentielle est croissante et le log est concave. □

Exercice 10
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et $f : I \to E$ une fonction $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in I^2 \qquad \|f(x) - f(y) - (y-x)f'(x)\| \leq |y-x| \sup_{t \in [0;1]} \|f'(x+t(y-x)) - f'(x)\|$$

Solution.

□