Lycée Louis le grand | Année scolaire 2007/2008
Mathématiques Supérieure MPSI

Semaine 13
2 avril 2008

1 Programme de Colles : Espaces vectoriels de dimension finie.

On note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Base d'un espace vectoriel.

Famille libre d'un espace vectoriel (de cardinal fini ou infini). Famille génératrice. Définition d'une base. Existence et unicité de la décomposition dans une base. De toute famille génératrice on peut extraire une base, théorème de la base incomplète.

1.2 Notion de dimension.

On dit que E est de dimension finie si E possède une famille libre et génératrice. Dans un espace vectoriel de dimension finie toutes les bases ont même cardinal. Définition de la dimension. Application : développement en éléments simples d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est scindé a racines simples. Dimension d'un sous espace vectoriel : si $F \subset E$ alors $F = E \iff \dim F = \dim E$. Caractérisation des sous-espaces supplémentaires.

1.3 Applications linéaires.

Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base, caractérisation des applications linéaires injectives, surjectives ou bijective par l'image d'une base. Rang d'une famille de vecteurs de E, d'une application linéaire, formule du rang. Dimension de la somme de deux sous espaces vectoriels. Équivalence entre injectif, surjectif et bijectif pour une application linéaire de E dans F deux espaces vectoriels de même dimension.

1.4 Application.

Suites à récurrence linéaire.

2 Petits

Exercice 1
Soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G)$ où $\dim F = n < \infty$. Montrer que

$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - n \leq \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$$

Solution. Première inégalité. $f(E) \subset F$ donc $g(f(E)) \subset g(F)$, par conséquent $\operatorname{rg}(g\circ f) \leq \operatorname{rg} g$. De plus la formule du rang pour $g_{|f(E)}$ s'écrit $\operatorname{rg}(g\circ f) = \operatorname{rg} f - \dim(\operatorname{Ker} g_{|f(E)})$, et ainsi $\operatorname{rg}(g\circ f) \leq \operatorname{rg} f$. En conclusion, nous avons donc $\operatorname{rg} g \circ f \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$.

Seconde inégalité. Celle-ci est équivalente à $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - n \leq \operatorname{rg} f - \dim(\operatorname{Ker} g_{|f(E)})$, c'est-à-dire $-\operatorname{rg}(g) + n \geq \dim(\operatorname{Ker} g_{|f(E)})$. Or $-\operatorname{rg}(g) + n = \dim(\operatorname{Ker} g) \geq \dim(\operatorname{Ker} g_{|f(E)})$, ce qui permet de conclure. $\square$

Exercice 2
Soit $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$, où $\dim E = n < \infty$. Montrer que

$$|\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

Solution.

□

Exercice 3
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ tels que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $f^n(x) = 0$. Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est libre.

Solution. Soit $(\lambda_i)_i \in K^n$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$. Notons i_0 le premier indice tel que $\lambda_i \neq 0$. En composant par f^{n-1-i_0}, on obtient $\lambda_{i_0} f^{n-1}(x) = 0$, et par conséquent $\lambda_{i_0} = 0$, ce qui est absurde. □

Exercice 4
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, où $\dim E < \infty$. Montrer que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \iff f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg}(f)$$

Solution. □

Exercice 5
Soit $0 \to E_1 \to \cdots \to E_n \to 0$ une suite exacte d'espaces vectoriels. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim E_i = 0$$

(idée de suite : lemme des 5, lemme du serpent (lors de colles de révision))

Solution. □

3 Gros

Exercice 6
On pose

$$\varphi_n : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos nx \end{pmatrix} \qquad \psi_n : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\cos x)^n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\forall n$ $(\varphi_k)_{k \leq n}$ et $(\psi_k)_{k \leq n}$ sont des familles libres de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que $\forall n$ $\operatorname{Vect}(\varphi_0, \ldots, \varphi_n) = \operatorname{Vect}(\psi_0, \ldots, \psi_n)$.
3. La famille $(\varphi_n)_n$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Solution.

1. Par récurrence en regardant $x = \pi/2n$ pour $(\varphi_k)_{k \leq n}$.
2. Formules de trigo (ou Moivre).
3. Non : il existe des fonctions non bornées, ou non continues.

□

Exercice 7
Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-\mathrm{ev}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\exists!(u,v) \in \mathbb{C}^2 \ / \ \forall z \in \mathbb{C} \ \ f(z) = uz + v\bar{z}$.
2. Montrer que f est bijective si et seulement si $|u| \neq |v|$.
3. On suppose $u \neq 0$, et on pose w une racine carrée de $-\frac{v}{u}$. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ lorsque $|v| = |u|$, à l'aide de w.

Solution.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} f(1) + \frac{z-\bar{z}}{2} f(i)$. Par conséquent, en développant et réordonnant les termes, $f(z) = \frac{f(1)+f(i)}{2} z + \frac{f(1)-f(i)}{2} \bar{z}$, ce qui nous donne l'existence de u et v. Si on suppose que (u,v) et (u',v') conviennent, c'est-à-dire que $(u-u')z + (v-v')\bar{z} = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, on obtient $u = u'$ et $v = v'$, d'où l'unicité.
2. Si f est non bijective, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$, on a $uz = -v\bar{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, par conséquent $|u| = |v|$.

   Réciproquement, si $|u| = |v|$, on prouve que $w \in \mathrm{Ker}\, f$ est un complexe de module 1, et donc non nul.
3.

□

Exercice 8
Soit $(x_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ des réels deux à deux distincts, $(r_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ des entiers positifs, et $(y_{i,j})_{(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{0,\dots,r_i\}}$ des réels. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré $n-1+\sum r_i$ tel que $\forall (i,j) \ P^{(j)}(x_i) = y_{i,j}$.

Solution. □

4 Impairs

Exercice 9 (Dedekind)

1. Soit $M - L - K$ des extensions finies. Montrer que $[M:K] = [M:L][L:K]$.
2. Soit $\mathbf{k}$ un corps, A une $\mathbf{k}$-algèbre (commutative) et $\mathbf{k}'$ une extension de $\mathbf{k}$. Montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(A, \mathbf{k}')$ est une partie libre de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}\text{-mod}}(A, \mathbf{k}')$.

Solution.

1. Si $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une L-base de M, et $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$ une K-base de L, alors $(e_i f_j)_{i,j}$ est une K-base de M.
2. Soit $(\varphi_i)_{i \in I} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}\text{-alg}}(A, \mathbf{k}')^I$ une famille liée de taille minimale — elle est donc de cardinal au moins 2. Soit $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbf{k}^I$ tels que $\sum_{i \in I} \lambda_i \varphi_i = 0$. Les φ_i sont des morphismes d'algèbre, donc pour $x \in A$ fixé, on a $\forall y \in A \ \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(y) = 0$, et ainsi $\sum_{i \in I} (\lambda_i \varphi_i(x)) \varphi_i = 0$. De plus, en multipliant la somme d'origine par $\varphi_{i_0}(x)$, on a $\sum_{i \in I} (\lambda_i \varphi_{i_0}(x)) \varphi_i = 0$, et par conséquent
   $$\sum_{i \in I} \lambda_i (\varphi_i(x) - \varphi_{i_0}(x)) \varphi_i = 0$$
   En choisissant bien i_0 et x on a donc trouvé une famille liée de taille strictement plus petite que la taille minimale, ce qui est absurde.

□