Lycée Louis le grand Année scolaire 2007/2008
Mathématiques Supérieure MPSI

Semaine 11
17 décembre 2009

1 Programme de Colles : développements limités.

1.1 Développements limités.

Définition d'un développement limité en x_0 à l'ordre n. Partie régulière du DL, reste. Équivalence entre dérivabilité et DL à l'ordre 1, contre exemple à l'ordre 2. Unicité, DL d'une fonction paire ou impaire. DL d'une combinaison linéaire de deux fonctions.

1.2 Formule de Taylor-Young.

Formule, on prend pour hypothèses $f : I \to \mathbb{K}$ de classe C^n au voisinage de x_0 (où $\mathbb{K}$ vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Application à l'étude locale d'une courbe paramétrée. Développements limités des fonctions exponentielles, circulaires, puissance, en particulier $\sqrt{1+x}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

1.3 Opérations sur les développements limités.

Quelques opérations sur les restes : $(f + o(g))^n = f^n + o(g)$ si f et g sont bornées au voisinage de 0, troncature à l'ordre n d'une fonction polynôme. Opérations sur les DL : produit, intégration, composition. Cas du DL de $\frac{1}{1+u}$, application au DL d'un quotient.

1.4 Développements asymptotiques.

Aucune théorie dans ce paragraphe, on se contente de quelques exemples et surtout de l'application à la recherche d'asymptotes obliques.

2 Petits

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\exists P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair $/ \forall n \forall x \left|f^{(n)}(x)\right| \leq |P(x)|$ Montrer que $f = 0$.

Solution. $\exists x_0 / P(x_0) = 0$, puis Taylor-Lagrange en x_0. On peut suppose $x_0 = 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $c_x \in [0, x]$ tel que

$$|f(x)| = \left|\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}\right| |x^n| \leq |P(c_x)| \frac{|x^n|}{n!} \leq \left(\sup_{[0,x]} |P|\right) \frac{|x^n|}{n!} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$$

□

Exercice 2
1. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto e^{\sin x}$.
2. Faire de même en $\frac{\pi}{4}$ pour la fonction $x \mapsto \sqrt{\tan x}$.
3. Donner un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto (1 + \sin x)^x$

Solution.
1. $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$
2. $g(\pi/4 + x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + O(x^4)$

□

Exercice 3
Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que la suite $\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ a une limite que l'on trouvera.

Solution. □

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\|f\|_\infty$ et $\|f''\|_\infty$ existent. Montrer que f' est bornée et que $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$

Solution. Appliquer T-Y en x et en $-x$, en déduire la majoration $|f'(0)| \leq \|f''\|_\infty \frac{x}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{x}$ □

Exercice 5
Donner un équivalent en 0 de $x \mapsto \sin(\tan x) - \tan(\sin x)$.

Solution. □

3 Gros

Exercice 6
Soit f définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x > 0$ et $f(x) = 0$ pour $x \leq 0$.

1. Montrer que f est C^n en 0 pour une valeur convenable de n.
2. DL (ou équivalent) en 0.
3. Soit $a < b$, trouver une fonction C^∞ telle que $f > 0$ sur $]a, b[$ et $f = 0$ en dehors de $]a, b[$.

Solution.

1. $f^{(n)}(x)/x = P_n(1/x)f(x)$ avec P_n un polynôme dépendant de n, donc f est C^∞ en 0.
2. 0, d'après la question précédente.
3. Produit *ad hoc* de fonction du type précédent (par exemple $f(x-a)f(b-x)$).

□

Exercice 7 (stirling)
On pose $u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$. En étudiant $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ trouver un équivalent de $n!$ lorsque $n \to \infty$.

Solution. Nécessite des connaissances sur les séries. □

Exercice 8

Solution. □