Lycée Louis le grand
Mathématiques Supérieure MPSI

Année scolaire 2007/2008

Semaine 10
6 janvier 2008

1 Programme de Colles : Fonctions dérivables

1.1 Dérivée en un point.

Définition du nombre dérivé, de la fonction dérivée, interprétation graphique. Équivalence entre dérivabilité et DL au rang 1. Dérivées à droite et à gauche.

Calculs de dérivées : somme, produit, quotient, composée. Dérivabilité de la réciproque d'une bijection dérivable.

Dérivées successives, définition d'une application de classe $\mathscr{C}^n$. Structure de K-algèbre, formule de Leibniz.

Brève extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1.2 Étude globale.

Extremum d'une fonction dérivable. Théorème de Rolle, théorème des accroissement finis. Applications : règle de L'Hospital, théorème limite de la dérivée, inégalités des accroissements fini, Étude des variations

1.3 Fonctions convexes.

Définition : on dit que f est convexe si $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$. Interprétation graphique. Caractérisation par la croissance des taux d'accroissement. Cas des applications dérivables, deux fois dérivables.

Inégalités de convexité, inégalité entre moyenne arithmétique et géométrique.

2 Petits

Exercice 1
Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(2t)-f(t)}{t} = \ell$. Montrer que f est dérivable en 0.

Solution. Posons $u_n(t) = \frac{f(t)-f(2^{-n}t)}{t}$. La suite u_n vérifie la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n \quad + \quad 2^{-(n+1)} \underbrace{\frac{f(2(2^{-(n+1)}t)) - f(2^{-(n+1)}t)}{t2^{-(n+1)}}}_{\longrightarrow_{t\to 0}\ \ell}$$

□

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 telle que $\forall x\ f(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}f(x)$. Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \lambda x$.

Solution. On peut supposer $f'(0)$, quitte à poser $g(x) = f(x) - f'(0)x$. Par conséquent, lorsque $n \to +\infty$, $f(x)/x = f(x2^{-n})/(x2^{-n}) \longrightarrow f'(0) = 0$. □

Exercice 3
Soit $I \neq \emptyset$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. Montrer que f injective sur $I \Longrightarrow f$ strictement monotone sur I.
2. Montrer que $f'(a) < 0 \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 / \forall x \in]a, a+\varepsilon[f(x) < f(a)$.
3. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 4
Soit $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que

$$\lim_{1^-} f = 0 \qquad \text{et} \qquad (x \mapsto (1-x)^2 f''(x)) \text{ est bornée sur } [0, 1[$$

Montrer que $\lim_{x \to 1^-} (1-x) f'(x) = 0$.

Solution. □

Exercice 5
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que

$$\forall x \in [a, b] \quad \exists c_x \in]a, b[\quad f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x)$$

Solution. Rolle + Rolle. □

Exercice 6
Soit $f \in \mathscr{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ convexe telle que $f' > 0$, et $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Notons α l'unique racine de $f(x) = 0$. Posons $u_0 = b$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{c}(c(b-a))^{2^n}$

Solution. □

Exercice 7
Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$, strictement positifs. Montrer que $\frac{x_1}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$.

Solution. On cherche donc à prouver l'inégalité $\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1}\right) \geq 1$. On pense donc immédiatement à de la convexité.

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum \frac{x_i}{x_{i+1}}\right) \geq \frac{1}{n}\sum \ln\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = \frac{1}{n}\sum (\ln x_i - \ln x_{i+1}) = 0$$

Ce qui nous donne l'inégalité cherchée lorsqu'on passe aux exponentielles (exp est une fonction croissante). □

3 Gros

Exercice 8 (Jensen)
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe continue. Montrer que

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x$$

Solution. □

Exercice 9

1. Montrer qu'une fonction convexe et concave est affine.
2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x \in]a, b[\ \exists \varepsilon > 0 \ / \ f(x) = \frac{1}{2}(f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon))$$

(où ε est choisi tel que $x+\varepsilon$ et $x-\varepsilon$ restent dans l'intérieur de l'intervalle). Montrer que f est affine.

Solution.

1. Géométriquement immédiat : la courbe est confondue avec ses cordes.
2. Il suffit de montrer que la fonction est convexe — pour obtenir la concavité, on appliquera le résultat à $-f$. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $(u, v, w) \in]a, b[^3$ tel que $u < v < w$ et $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} > \frac{f(w)-f(u)}{w-u}$.

   On définit la fonction $h : [u, w] \to \mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - f(u) - (x-u)\left(\frac{f(w)-f(u)}{w-u}\right)$. Cette fonction vérifie la même propriété que f, et de plus $h(u) = h(w) = 0$, et par hypothèse $h(v) > 0$. Posons $y = \inf\{x \in [u, w] \mid h(x) = \sup_{[u,w]} h\}$ (il existe par Heine, h étant continue sur un compact), y appartient à $]u, w[$. On a donc $h(y) > h(y-\varepsilon)$ et $h(y) \geq h(y+\varepsilon)$ ce qui contredit la propriété vérifiée par h.

$\square$

Exercice 10

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ convexe. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leq \frac{1}{2}f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{8}(f'(n) - f'(1))$$

Solution. Pour la première inégalité, c'est simplement une inégalité de convexité (le graphe est sous la corde) suivie d'une intégration.

Pour la seconde, on peut procéder de deux façons, soit géométriquement (la preuve est laissé au lecteur), soit par une intégration par parties.

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\left(t - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right) f(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(f(k+1) + f(k)) - \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

De plus f est convexe, donc f' est croissante et par conséquent

$$\int_k^{k+1/1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(k+1)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{k+1/2}^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(k)\,\mathrm{d}t$$

Il s'en suit que

$$\frac{1}{8}(f'(k) - f'(k+1)) \leq \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{8}(f'(k+1) - f'(k))$$

Ce qui nous donne l'inégalité cherchée. $\square$