Lycée Louis le grand — Année scolaire 2008/2009
Mathématiques Supérieure MPSI

Semaine 7
26 novembre 2009

1 Programme de Colles : Chapitre 8. Limites et continuité.

On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

1.1 Notions liées à l'ordre.

Définition de majoré, minoré, monotone, périodique, lipschitzien.

1.2 Étude locale.

Limite d'une fonction, caractérisation séquentielle, opérations sur les limites. Limites et inégalités, les applications monotones possèdent des limites à gauche et à droite.

1.3 Relations de comparaison.

Définitions, notations classiques. Comparaison des fonctions de référence, croissances comparées. Application des équivalents à la recherche de limites.

1.4 Applications continues.

Définition, prolongement par continuité, opérations sur les applications continues.

Théorème des valeurs intermédiaires, image continue d'un segment, bijections continues. La réciproque d'une bijection continue est continue.

Uniforme continuité, théorème de Heine.

2 Petits

Exercice 1
Études de continuité, avec des ε.

1. $h : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \mathbb{Q} \ni \frac{p}{q} & \mapsto & \frac{1}{q} \\ \mathbb{Q} \not\ni t & \mapsto & 0 \end{cases}$ où p et q sont premiers entre eux.
2. $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \mathbb{Q} \ni \frac{p}{q} & \mapsto & \frac{pq}{p^2+q^2+2q} \\ \mathbb{Q} \not\ni t & \mapsto & \frac{t}{1+t^2} \end{cases}$ où p et q sont premiers entre eux.

Solution.

1. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$, et $f(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{Q}$, donc f n'est pas continue aux points rationnels. Par contre f est continue aux points irrationnels. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $\varepsilon > 0$ fixés, et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/q < \varepsilon$. Dans l'intervalle $[x-1, x+1]$ il n'y a qu'un nombre fini de rationnels p'/q' tels que $1/q' > 1/q$. Si p_0/q_0 est le rationnel le plus proche de x qui vérifie $1/q_0 > 1/q$, $\eta = |x - x_0|/2$ convient pour montrer la continuité en x.
2. Même démarche.

$\square$

Exercice 2
Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sum_1^n x^k - 1$. Montrer que $f_n(x) = 0$ a une unique solution x_n, puis déterminer $\lim x_n$.

Solution. Croissance stricte et théorème des valeurs intermédiaires.
« Convergence uniforme » : quel que soit n, $x_n \leq 3/4$ et $|x_n - 1/2| \leq K x_n^n$. $\square$

Exercice 3

1. Déterminer $\{f$ continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ admet 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes$\}$.
2. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues périodiques. Que peut-on dire de $f + g$?

Solution.

1. L'ensemble des périodes de f est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ dont ce sous-groupe est dense. La fonction f est donc constante sur un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$, et par continuité sur tout $\mathbb{R}$. Réciproquement, toute fonction constante convient.
2.

$\square$

Exercice 4
$x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $(x \neq 0)$ n'a pas de limite en 0. Qu'en est-il de $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$?

Solution. Trouver deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers 0 telles que les limites de $f(u_n)$ et $f(v_n)$ soient différentes. $\square$

Exercice 5

1. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante telle que $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que f est continue si et seulement si il existe g, une fonction continue, telle que f/g soit décroissante.

Solution. $\square$

Exercice 6
Déterminer les automorphismes continus de $\mathbb{R}$.

Solution. Pour des raisons algébriques $f_{|\mathbb{Q}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$, donc, par continuité, $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. $\square$

Exercice 7
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$. Montrer que

1. f continue $\Longrightarrow f$ a un point fixe.
2. f croissante $\Longrightarrow f$ a un point fixe.
3. contre-exemple dans le cas décroissante.

Solution.

1. $x \mapsto f(x) - x$ et TVI.
2. Borne sup. de $\{x | f(x) \leq x\}$.
3. $f_{|[0,1[} = 1$ et $f(1) = 0$.

□

Exercice 8
Soit f un fonction k-lipschitzienne. Montrer que $\{k \in \mathbb{R}_+ \mid f \ k\text{-lip.}\}$ est de la forme $[A, +\infty[$.

Solution. Le seul point délicat, c'est de montrer que l'intervalle $\{k \in \mathbb{R}_+ \mid f \ k\text{-lip.}\}$ est fermé. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque, on aura alors $\forall k > A,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, et donc par passage à la limite, $|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|$. □

Exercice 9

1. Soit $f : A \to \mathbb{R}$, où $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que $f(A)$ est un segment $\Longrightarrow f$ est uniformément continue.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que $\exists a, b \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R} |f(x)| \leq a|x| + b$.
3. Montrer qu'une fonction continue ayant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$ est uniformément continue et bornée.

Solution.

1.
2. Écrire l'uniforme continuité. Prendre une subdivision de pas η de $[x, y]$, on obtient $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\eta}|x - y| + |f(0)|$.

□

Exercice 10
$f : I \to \mathbb{R}$ monotone. Montrer que f continue équivaut à $f(I)$ est un intervalle.

Solution. La monotonie entraîne l'existence de $\lim_{x+} f$ et $\lim_{x-} f$, de plus $f(I)$ est un intervalle, il n'y a donc « pas de trous », et égalité des limites à droite et à gauche. □

Exercice 11
Continuité de $F(x) = \sup_{t \in [x, x+a]} f(t)$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et $a > 0$.

Solution. Le sup est-il atteint ? □

Exercice 12
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{|x| \to +\infty} f = 0$. Montrer que f est bornée et que son sup est atteint.

Solution. Écrire la limite en $\pm\infty$ avec $\varepsilon = 1/2$ et utiliser la compacité de l'intervalle $[-A, A]$ restant pour conclure, en remarquant que le sup ne peut pas être atteint sur le complémentaire (quitte à remplacer $\varepsilon = Sup|f|/2$). □

Exercice 13
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $f^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Solution. Raisonner par l'absurde et appliquer le TVI pour obtenir un point d'annulation de f.
□

Exercice 14
Soit $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 1.

3 Gros

Exercice 15
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$ admet une solution. Est-ce encore le cas si $n \notin \mathbb{N}$.

Solution. Considérer $x \mapsto x - \frac{\sin^2(n\pi x)}{\sin^2(n\pi)}$. □

Exercice 16
Études de continuité, avec des ε.

1. Soit f la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$: $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \mathbb{Q} \ni t & \mapsto & 1 \\ \mathbb{Q} \not\ni t & \mapsto & 0 \end{array} \right.$. Montrer que f est discontinue en tout point
2. Trouver une fonction f périodique non constante n'admettant pas de plus petite période strictement positive.
3. Trouver une fonction f périodique non bornée.
4. Trouver une fonction bornée sur $\mathbb{R}$ qui n'atteint ses bornes sur aucun intervalle compact d'intérieur non vide.

Solution.

1. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont dense dans $\mathbb{R}$.
2. La fonction ci-dessus admet tout rationnel pour période.
3. $f : p/q \mapsto q$ et $t \notin \mathbb{Q} \mapsto 0$.
4. $f : p/q \mapsto (-1)^q(q-1)/q$ et $t \notin \mathbb{Q} \mapsto 0$.

□