Lycée Louis le grand
Mathématiques Supérieure MPSI

Année scolaire 2007/2008

Semaine 2
1^{er} octobre 2009

1 Programme de Colles : Structures de groupe et d'anneau.

1.1 Loi de composition interne.

Lois commutative, associative, élément neutre, élément inversible. Unicité de l'élément neutre et de l'inverse dans le cas associatif. Lois distributives l'une par rapport à l'autre. Partie stable, loi induite. Exemples divers.

1.2 Groupes.

Définition d'un groupe. Notation a^n pour $n \in \mathbb{Z}$. Sous-groupe, morphisme de groupes. Le noyau et l'image d'un morphisme de groupes sont des sous-groupes. Caractérisation des morphismes injectifs. Exemples.

1.3 Anneaux.

Définition d'un anneau. Calculs dans un anneau, formule du binome de Newton, identité de Bernoulli.

1.4 Symboles $\sum$ et $\prod$.

Méthodes de calcul de sommes et de produits. Sommes arithmétiques, géométriques, changement d'indice, sommation par paquets, sommations téléscopiques. Sommes doubles. Exemples.

2 Petits

Exercice 1
Soit A un anneau. Montrer que

1. $\forall x \in A,\ x^2 = x$ entraîne A commutatif.
2. $\forall x \in A,\ x^3 = x$ entraîne A commutatif.

Solution.

1. $(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$ donc $xy = -yx$. Donc $1 = -1$ et le résultat.
2. Plus difficile. Regarder « modulo 2 » et « modulo 3 ».

□

Exercice 2
Calculer $\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p(p-1)}$.

Solution. $\frac{1}{p(p-1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}$ donc la somme est télescopique. □

Exercice 3
Déterminer les morphismes de groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Solution. Soit φ un morphisme, et $n = \varphi(1)$. Alors $n = k\varphi(1/k)$ pour tout k, donc $\varphi(1) = 0$. $\square$

Exercice 4
Soit G un groupe commutatif fini, montrer que le ppcm ordre des éléments de G est l'ordre d'un élément de G.

Solution. $\square$

Exercice 5
Soit A un anneau. Montrer que, si $x \in A$ est nilpotent, $1 - x$ est inversible.

Solution. La série géométrique est finie lorsque x est nilpotent. $\square$

3 Gros

Exercice 6
Soient H et K des sous-groupes d'un groupe G. On note $HK = \{h.k \mid h \in H \text{ et } k \in K\}$. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

Solution. Sens direct : Soit $h.k \in HK$, qui est un sous-groupe, donc il existe $h' \in H$ et $k' \in K$ tels que $hkh'k' = 1$. En multipliant par $k'^{-1}h'^{-1}$ à droite, on trouve $hk = k'^{-1}h'^{-1} \in KH$. Donc $HK \subset KH$. Par une démarche analogue (mais non symétrique !), on a l'inclusion réciproque.

Réciproquement, si $h_1.k_1$ et $h_2.k_2 \in HK$, il existe $h \in H$ et $k \in K$ tels que $hk = k_1.k_2^{-1}h_2^{-1}$. Alors $h_1k_1.k_2^{-1}h_2^{-1} = (h_1h)k \in HK$. $\square$

Exercice 7
Soit A un anneau unitaire commutatif. Montrer que A contient des idempotents différents de 0 et de 1 si et seulement si A est isomorphe à $B \times C$ où B et C sont deux anneaux non nuls.

Solution. Réciproque : $e = (1, 0)$. Sens direct : $A \to eA \times (1-e)A$, en prouvant que ce sont des anneaux. $\square$

Exercice 8
Soit E un ensemble fini, muni d'une loi de composition interne $\star$ associative. Tous les éléments sont réguliers à gauche ($xa = xb \Rightarrow a = b$) et à droite ($ax = bx \Rightarrow a = b$).

1. Soit $a \in E$. Notons $s_a : E \to E$ définie par $s_a(x) = a \star x$. Montrer que s_a est bijective.
2. Montrer que $\forall (a, x) \in E^2 \; \exists p_0 \in \mathbb{N}^* \; a^{p_0}x = x$.
3. Montrer qu'il existe p tel que a^p soit un éléments neutre à gauche de E.
4. Montrer que a^p est l'élément neutre de E.
5. Montrer que $(E, \star)$ est un groupe.

Solution. $\square$

4 Impairs

Exercice 9
Lemme des cinq.