Exercices : Surfaces

Exercice 1 (Paraboloïdes)
Soit Σ la surface d'équation $z = x^2 - y^2$.

1) Déterminer les points où le plan tangent est horizontal. Donner la position de la surface par rapport au plan tangent en ces points.

2) Déterminer puis décrire géométriquement l'intersection de ce plan avec la surface.

3) Décrire selon $a \in \mathbb{R}$ l'intersection $\Sigma \cap (z = a)$.

4) Soit Σ' la surface d'équation $z = x^2 + y^2 - 1$. Déterminer les points où la droite normale est verticale. Position relative du plan tangent en ces points.

5) Déterminer l'intersection $\Sigma \cap \Sigma'$.

Exercice 2 (Parapluie de Whitney)
Soit Σ la surface d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & uv \\ y & = & u \\ z & = & v^2 \end{array}\right.$.

1) Déterminer les points réguliers de Σ.

2) Déterminer le plan tangent à la surface Σ au point M de paramètres $(1, 1)$.

3) Déterminer les points de Σ où le plan tangent est horizontal.

4) Déterminer les points de Σ où le plan tangent contient la droite $y = 2$ et $x = 3z + \dfrac{1}{3}$.

5) Déterminer une équation cartésienne de Σ (on notera qu'il y a une *double* inclusion à montrer).

Exercice 3 (Ellipsoïde)
Déterminer les plans tangents à la surface Σ d'équation $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ et perpendiculaires à la droite $\mathscr{D}$ d'équations $x = \dfrac{y}{2} = -\dfrac{z}{2}$.

Exercice 4 (hyperboloïde à une nappe)
Soit a, b, c trois réels strictement positifs, et Σ la surface d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

1) Déterminer l'intersection de Σ avec le plan d'équation $z = 0$. Paramétrer cette courbe.

2) Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ fixé, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur.
Écrire les conditions sur les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ pour que la droite $A_\theta + \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u})$ soit incluse dans Σ.
En déduire qu'il existe exactement deux droites, $\mathscr{D}_\theta$ et $\mathscr{D}'_\theta$, passant par A_θ et contenues dans Σ.

3) Montrer que, pour tout $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$, il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & u\cos\theta - v\sin\theta \\ y & = & u\sin\theta + v\cos\theta \end{array}\right.$$

<u>Indication</u> : *Poser dans un premier temps $A = \cos\theta$ et $B = \sin\theta$ ou raisonner géométriquement.*

4) En déduire deux familles de droites engendrant Σ, en remarquant que l'équation de départ peut s'écrire.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$$

On pourrait de plus prouver que

- deux droites prises dans deux familles différentes sont toujours coplanaires ;
- deux droites prises dans une même familles ne sont jamais coplanaires.

Exercice 5 (lignes de plus grande pente)
Soit Σ la surface d'équation $x^2 - y^2 = z$, et $\mathscr{C}$ un arc $\mathscr{C}^1$ de paramétrage $\left\{\begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (f(t), g(t), z(t)) \end{array}\right.$

1) Donner la condition sur $t \mapsto z(t)$ pour que la courbe $\mathscr{C}$ soit incluse dans Σ.

2) Quelle relation doivent vérifier f et g pour qu'en chaque point $\mathscr{C}$ soit perpendiculaire à la section horizontale de Σ passant par ce point ?

La courbe $\mathscr{C}$ est alors appelée une ligne de plus grande pente, et les sections horizontale des lignes de niveau.

Exercice 6 (suite de l'exercice 2)
Montrer que Σ est réglée.

Exercice 7 (suite de l'exercice 1)
Soit Σ la surface d'équation $z = x^2 - y^2$.

1) Soit $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$, déterminer toutes les droites passant par M_0 et incluses dans Σ (considérer $\mathscr{D} \subset \Sigma$ donnée par son équation paramétrique, et trouver des conditions).

2) Nature de Σ.

Exercice 8 (Un conoïde : le coin conique)

1) Construction du conoïde Σ.

  a) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(0,1,1)$ et de rayon 1 contenu dans le plan $y = 1$. Donner une équation paramétrique de $\mathscr{C}$.

  b) Soit $\mathscr{D}_t$ la droite joignant un point de paramètre t de $\mathscr{C}$ à son projeté orthogonal sur (Oz). Donner une équation paramétrique de $\mathscr{D}_t$.

  On note Σ la surface réglée engendrée par les droites $\mathscr{D}_t$.

2) Déterminer une équation cartésienne de $\Sigma' = \Sigma \cup (Oz)$.

3) Préciser la nature de la courbe intersection de Σ avec un plan parallèle à Oxz.

On remarquera que la courbe de l'exercice 2 est aussi un conoïde, s'appuyant sur une parabole au lieu d'un cercle.

Exercice 9 (L'hélicoïde développable)
Soit Σ la surface paramétrée par $\begin{cases} x = \cos t - \lambda \sin t \\ y = \sin t + \lambda \cos t \\ z = t + \lambda \end{cases}$ avec $(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

1) Montrer que Σ est une surface réglée.

2) Déterminer l'équation du plan tangent en $M(t, \lambda) \in \Sigma$.

3) Soit $\mathscr{C}$ la courbe paramétré par $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

  a) Montrer que $\mathscr{C}$ est une hélice.

  b) Déterminer la surface engendré par les tangentes à $\mathscr{C}$. Que remarque-t-on ?

Exercice 10 (Möbius)
Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Soit Σ la surface de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = \left(a + u \cos \dfrac{v}{2}\right) \cos v \\ y = \left(a + u \cos \dfrac{v}{2}\right) \sin v \\ z = u \sin \dfrac{v}{2} \end{cases}$.

Montrer que Σ est réglée. Est-elle de révolution autour de (Oz) ? Plan tangent en un point régulier. Montrer qu'elle est contenue dans $(x^2 + y^2)(y - z)^2 = (ay + xz)^2$ mais que l'on a rajouté tout le plan $y = 0$.
Lorsque l'on considère cette surface pour $u \in [-b, b]$ on retrouve le ruban de Möbius.

Exercice 11
Pour chacune des surfaces suivantes, vérifier qu'elles sont de révolution et déterminer leur axe. Dans chacun des cas, décrire les parallèles et une méridienne.

1) $x^2 + y^2 - 8z = 0$ **2)** $4x^2 + 4y^2 - 2z^2 = 1$ **3)** $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = \operatorname{Arccos} u \end{cases}$ **4)** $(x^2 + z^2)^3 - y^2 + 2y - 3 = 0$

Exercice 12
Déterminer une équation cartésienne de la surface Σ de révolution engendré par la rotation autour de l'axe $x = y = z$ de la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par $x = t$, $y = t^2$ et $z = -t^2$.

Exercice 13
Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que la surface d'équation $z = f(x^2 + y^2)$ est de révolution. On précisera l'axe et une méridienne.

Exercice 14 (tore $S^1 \times S^1$)
Soit a et R deux réels vérifiant $0 < R < a$. On note Σ la surface de révolution engendrée par la rotation du cercle de centre $A(a, 0, 0)$ et de rayon R contenu dans le plan (Oxz) autour de l'axe (Oz).

1) Déterminer une équation paramétrique du tore Σ.

2) Déterminer une équation cartésienne du tore Σ.

Exercice 15 (OT PSI 2012)
Soit Γ la courbe d'équations
$$\begin{cases} x = \dfrac{t-1}{t^2+t+1} \\ y = \dfrac{t+1}{t^2+t+1} \\ z = \dfrac{t^2+3t-2}{t^2+t+1} \end{cases}$$

1) Montrer que Γ est incluse dans un plan Π et dans une surface Σ d'équation $z = f(x, y)$ contenant O. On donnera les équations cartésiennes de ces deux surfaces.

2) Équation paramétrique de la tangente en $M(1)$ à Γ.

3) À l'aide d'un changement de repère, donner une équation puis décrire la courbe plane Γ.