Exercices : Séries Numériques

Exercice 1 (cours)
Il faut connaître parfaitement la nature des séries de terme général u_n suivants :

1) $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ **2)** $u_n = q^n$ selon les valeurs de $q \in \mathbb{C}$.

Exercice 2
Déterminer la nature des séries suivantes :

1) $u_n = \dfrac{5^n + 2}{11^n + 3}$, **2)** $u_n = n^3 \sin(\dfrac{1}{2^n})$, **3)** $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, **4)** $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

5) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(\ln n)^{\ln n}}$, **6)** $u_n = e^{-\sqrt{n}}$, **7)** $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \neq 1$

Exercice 3 (Formule de Stirling)
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$.

1) Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

2) En déduire que la suite (u_n) converge, puis qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$n! \sim K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Remarque : on peut montrer, grâce aux intégrales de Wallis, que $K = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 4
Soit f, une fonction positive, décroissante et continue sur $[1, +\infty[$. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad F(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)dt$$

1) Montrer que la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire que la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

2) Application : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

En déduire un développement asymptotique de la série harmonique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Remarque. La limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la constante d'Euler $\gamma \approx 0{,}57721566$.

Exercice 5 (Séries alternées)
Dans cet exercice, on montre qu'il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergente, i.e. telles que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ existe et $\in \mathbb{R}$ mais $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} |u_k| \notin \mathbb{R}$.

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ et $u_n = (-1)^n a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose de plus que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geqslant 0 \qquad , \qquad (a_n) \text{ est décroissante} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

1) Montrer que (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont des suites adjacentes. Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

2) Trouver un exemple de série convergente mais non absolument convergente.

Exercice 6

1) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Montrer que si la série de terme général u_n est convergente et $u_n \geqslant 0$, alors la série de terme général u_n^2 est convergente.

2) Ce résultat demeure-t-il vrai si les réels u_n ne sont plus supposés positifs ? Indication : *On pourra rechercher un contre-exemple sous la forme d'une série alternée.*

3) On suppose que $u_n > -1$ et que les séries de terme général u_n et u_n^2 convergent. Étudier la série de terme général $\ln(1 + u_n)$.