Exercices : Séries entières

Exercice 1

1) Déterminer en fonction du paramètre $x \in \mathbb{R}$ la nature de chacune des séries de terme général u_n suivantes. On laissera de coté le comportement « au bord ».

a) $u_n = x^n$ **b)** $u_n = nx^{n-1}$ **c)** $u_n = \dfrac{x^{2n}}{n^2 3^n}$ **d)** $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ **e)** $u_n = \dfrac{(-i)^n (n!)^n}{(2n+1)!} x^{4n+1}$

2) Mêmes questions pour $z \in \mathbb{C}$. On ne s'intéressera qu'à la convergence absolue.

Exercice 2

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1) $\sum (3n+1) z^{3n}$, **2)** $\sum \dfrac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!} z^n$, $a > 0$ **3)** $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1} z^n$, **4)** $\sum \dfrac{n^2}{3^n + n} z^n$,

5) $\sum \dfrac{\operatorname{ch}(n)}{n} z^n$, **6)** $\sum \dfrac{\operatorname{ch}(n)}{n} z^{2n}$, **7)** $\sum \sin(n) z^n$, **8)** $\sum n! z^n$ **9)** $\sum \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right) z^n$

Exercice 3

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes, et exprimer leur somme sur l'intervalle $]-R, R[$ à l'aide de fonctions usuelles.

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + 3^n) x^n$, **2)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{4n}$, **3)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1}$ **4)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ **5)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$,

6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(na)}{n! \sin^n a} x^n$, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n! \sin^n a} x^n$, avec $a \notin \pi\mathbb{Z}$

Déterminer la somme sur l'intervalle $]-R, R[$, donc pour une variable x réelle, des séries correspondant au **5), 6), 7)** puis **1)** de l'exercice 2.

Exercice 4

Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière au voisinage de 0, et calculer leur développement.

1) $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, **2)** $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$, **3)** $\cos^2 x \sin x$, **4)** $e^x \cos(x)$, **5)** $\dfrac{1}{(1-t)^3}$.

6) $f(x) = \cos\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$ et $f(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{-x})$ pour $x < 0$.

Exercice 5 (D'après PT 2008)

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$y' = xy + 1 \qquad y(0) = 0$$

1) Soit $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients réels, de rayon de convergence $R > 0$. On suppose que la fonction F est solution de l'équation différentielle sur $]-R, R[$. Déterminer a_0, a_1 ainsi qu'une relation de récurrence reliant, pour tout entier $n \geqslant 1$, a_{n+1} à a_{n-1}.

2) Pour tout entier naturel $p \geqslant 0$, en déduire la valeur de a_{2p} . Déterminer R.

3) Exprimer, pour tout entier naturel $p \geqslant 0$, a_{2p+1}.

Exercice 6

Déterminer les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes. On exprimera explicitement les solutions obtenues à l'aide des fonctions usuelles.

1) $y' - x^2 y = 0$, $y(0) = 1$; **2)** $xy'' + 2y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; **3)** $xy' - y = \dfrac{x^2}{1-x}$.

Exercice 7
Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes :

1) $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$ **2)** $\text{Arctan}\left(\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$ **3)** $\dfrac{2}{x^2-4x+3}$ **4)** $\dfrac{1}{x^2+x+1}$

Exercice 8
Étude de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}x^{2n+1}$.

1) Déterminer le rayon de convergence de cette série.

2) Calculer la somme de la série dérivée, en déduire une expression de la somme f.

Exercice 9
Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes au voisinage de x_0. On pourra poser $x = x_0 + h$ puis remplacer à la fin du calcul h par $x - x_0$.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ au voisinage de $x_0 = -2$ **2)** $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de $x_0 = 3$

Exercice 10
À l'aide d'une équation différentielle, déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes

1) $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ **2)** $f(x) = (\text{Arcsin } x)^2$ **3)** $f(x) = (\ln(1+x))^2$

Exercice 11
Soit (a_n) une suite de nombres complexes tels que le rayon R de convergence de la série entière associée soit strictement positif. Quel est le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}z^n$$

Exercice 12
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\dbinom{2n}{n}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} = -2(2n-1)a_n$.

2) Donner le rayon de convergence R de la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, puis montrer que f est solution sur $]-R, R[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on explicitera.

3) En déduire f.