# 1 Oral II – ENSAM – Python

**Planche 1 (2015, ENSAM Python — élève 1)**

1) Coder une fonction qui détermine si un nombre est premier.
2) Écrire une fonction `listePremiers(n)` qui retourne la liste des nombres premiers inférieurs à un entier `n`. Quelle est sa complexité ?
3) Écrire une fonction `listePremiersBis(n)` qui retourne une liste identique à la précédente, mais en « rayant » les nombres qui ne sont pas premier, en commençant par les multiples de 2, de 3, etc. Quelle est sa complexité ?
4) Illustrer les complexités à l'aide d'un compteur.

**Planche 2 (2015, ENSAM Python — élève 2)**
Soit $A(22, 10)$, $B(12, 3)$ et $C(3, 3)$.

1) Tracer le triangle $ABC$ à l'aide de la fonction `plot`.
2) On définit la suite $(T_n)$ de points par : $T_0 = A$, $B$ ou $C$ de façon équiprobable, et si $T_n$ est construit, $T_{n+1}$ est le milieu entre $T_n$ et l'un des trois points $A$, $B$ ou $C$ de façon équiprobable.
   Écrire une fonction d'argument un point $T$ et qui renvoie le milieu $S$ entre $T$ et l'un des trois points $A$, $B$ ou $C$.
3) Créer un tableau numpy `M` de taille $11 \times 2$ contenant les 11 premiers points de $(Tn)$. Afficher `M` en nuage de points.
4) Faire de même avec 10 000 points.
5) Afficher plusieurs tirages de couleurs différentes.

**Planche 3 (2015, ENSAM Python — conj.)**
Nombres parfaits.

1) Écrire une fonction qui donne l'ensemble des diviseurs stricts (autres que lui-même) d'un nombre $n$.
2) On appelle nombre parfait un entier naturel qui est la somme de ses diviseurs stricts. Déterminer les nombres parfaits inférieurs à 10000.
3) Déterminer les nombres parfaits trouvés à la question précédente qui s'écrivent comme somme de nombres impairs consécutifs élevés au cube.
4) Déterminer la somme des inverses des diviseurs d'un nombre parfait.

**Planche 4 (2015, ENSAM Python — Mimard)**
Soit $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble. Si $A_i$ représente une partie de $E$, elle est représentée par le code $c_i$ tel que $c_i[k] = 1$ si $a_k \in A_i$, et 0 sinon.

1) Écrire une fonction `reunion` d'arguments $c_1$ et $c_2$ qui retourne le code de $A_1 \cup A_2$.
2) Écrire une fonction `estRec` d'argument $L$ une liste de codes associés à des sous-ensembles de $E$ et retournant `True` si la réunion de ces sous-ensemble vaut $E$ et `False` sinon.
3) Soit $R$ un ensemble de parties de $E$ représenté par une liste $L$ de codes. On dit que $R$ est un *recouvrement minimal* de $E$ si la réunion des parties de $R$ vaut $E$ et que pour tout $R'$ inclus dans $R$ et différent de $R$, $R'$ n'est pas un recouvrement de $E$ (la réunion des parties de $R'$ est différente de $E$).
   Écrire la fonction `estRecMin` d'argument $L$ une liste de codes représentant $R$, qui retourne `True` si $R$ est un recouvrement minimal de $E$ et `False` sinon.

**Planche 5 (2015, ENSAM Python — Mimard)**
On dit qu'un mot est un palindrome si il est le même lorsqu'on le lit à l'envers. Par exemple le mot "radar" est un palindrome. Le mot "nul" donne "lun" à l'envers et n'est pas un palindrome.

1) Écrire une fonction `inverse` d'argument une chaîne de caractères `mot` et renvoyant la chaîne écrite à l'envers.

**2)** Écrire une fonction `palindrome` d'argument une chaine de caractères mot et qui renvoie le booléen True si le mot est est un palindrome et False sinon.

**3)** Par extension on dit qu'un nombre est un palindrome si il est égal au nombre obtenu en écrivant les chiffres en ordre inverse.

Écrire une fonction `palNombre`, d'argument $N$ et renvoyant la liste des nombres palindromes inférieur ou égaux à $N$.

## 2 Oral II – ENSAM – Mathématiques

**Planche 6 (2015, ENSAM — élève 1)**
On considère trois complexes $a$, $b$ et $c$ de module 1 tels que

$$a + b + c = 1$$

**1)** Montrer que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$.

**2)** Soit $P$ un polynôme de degré minimal ayant $a$, $b$ et $c$ comme racines. Montrer que l'une des racines est égale à 1. En déduire la forme des deux autres racines.

**Planche 7 (2015, ENSAM — élève 2)**
Pour $x > 0$ on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t^2\sqrt{x})\cos(t^3/3)\,\mathrm{d}t$

**1)** Montrer que $f$ est bien définie.

**2)** Montrer que $f$ est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ fixé.

**3)** Montrer que $f$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**4)** Montrer que $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2\sqrt{x}}\sin(t^3/3)\,\mathrm{d}t$.

**Planche 8 (2015, ENSAM — élève 4)**
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $F(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

**1)** Montrer que $I_n$ converge. Trouver une relation entre $I_n$ et $I_{n+2}$.

**2)** Calculer $I_{2p}$ et $I_{2p+1}$ sachant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

**3)** Calculer $F(x, y)$.

**Planche 9 (2015, ENSAM — élève 5)**
Résoudre l'équation différentielle $x(x-1)y' + y = 2x$.

**Planche 10 (2015/2013, ENSAM — Mimard/Cluny)**
Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F(x, y) = \displaystyle\int_{-x}^{y} f(2x+t)e^{x+t}\,\mathrm{d}t$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

**1)** Montrer que $F$ est bien définie et $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (on pourra effectuer un changement de variable).

**2)** Trouver une CNS sur $f$ pour que $F$ soit solution de l'EDP :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial F}{\partial x} - 4\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + F = 1$$

**3)** En déduire $f$.

**Planche 11 (2015, ENSAM — Mimard)**
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n > 0$ pour tout $n$ et qu'il existe $a \geqslant 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a - \frac{b}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

Discuter selon les valeurs de $a$ et $b$ la nature de la série $\sum u_n$.
Pour le cas $a = 1$ on pourra poser $v_n = \dfrac{u_n}{n^{-b}}$ et étudier $\sum \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.

**Planche 12 (2015, ENSAM — OT)**

**1)** Montrer que l'ensemble $G$ des matrices complexes de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 \neq 0$, est stable par le produit matriciel.

**2)** Pour $A \in G$ et $z \in \mathbb{C}$, on pose $h_A(z) = \dfrac{az - b}{bz + a}$. Montrer que $h_A \circ h_{A'} = h_{AA'}$, où $A, A' \in G$.

**3)** On définit la suite $(z_n)$ par $z_0 \in \mathbb{C}$ et $z_{n+1} = h_A(z_n)$. Exprimer $z_n$ en fonction de $a$, $b$, $n$ et $z_0$.

**Planche 13 (2015, ENSAM — OT)**

Une puce se déplace sur une droite. Au départ, elle est à la position $n \in [\![0, N]\!]$. À chaque saut, son abscisse augmente de 1 avec la probabilité $p \in ]0, 1[$ ou diminue de 1 avec la probabilité $q = 1 - p$. Elle s'arrête une fois arrivée en 0 ou en $N$.
On considère les trois événements :

- $A_n$ : « la puce s'arrête en 0 » ;
- $B_n$ : « la puce s'arrête en $N$ » ;
- $C_n$ : « la puce ne s'arrête jamais ».

On note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

**1)** Donner une relation entre $a_n$, $b_n$ et $c_n$.

**2)** Calculer $a_0$, $a_N$, $b_0$ et $b_N$.

**3)** Soit les événements $D$ : « le premier saut est vers la droite » et $G = \bar{D}$.
Montrer que pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, $a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}$ et en déduire $a_n$ en fonction de $n$ (on traîtera séparément le cas $p = \dfrac{1}{2}$).

**4)** Faire de même pour $b_n$.

**5)** En déduire $a_n + b_n$ et conclure.

**Planche 14 (2013, ENSAM, incomplet — élève 1)**

Déterminer les polynômes $P$ tels que $P(x^2) = P(x)P(X + 1)$. <u>Indication</u> : *Si* 0 *et* 1 *sont les seules racines, comment s'écrit le polynôme* $P$ *?*

**Planche 15 (2013, ENSAM — élève 2)**

Soit $(E) : x^2y'' - 2xy' + 2y = 2(1 + x)$.

**1)** Déterminer les solutions de la forme $x \mapsto x^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{N}$ de l'équation $(E')$ homogène associée.

**2)** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Attention à l'intervalle.

**3)** Solutions de $(E)$ sur les intervalles $I$ déterminés à la question précédente. (écrire $\ln|x|$, en faisant simple et sans oublier les valeurs absolues).

**4)** Déterminer les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

**Planche 16 (2013, ENSAM — élève 3)**

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 7 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ (coeffs à revoir)

**1)** Trouver $P$ inversible telle que $A = PTP^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

**2)** Étudier les suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ définies par $\begin{cases} u_{n+1} &= 6u_n - 6v_n + 7w_n \\ v_{n+1} &= -4u_n - v_n + 10w_n \\ w_{n+1} &= 7u_n - 6v_n + 4w_n \end{cases}$

**Planche 17 (2013, ENSAM — élève 4)**
Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$, $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ et $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.

**1)** Convergence.

**2)** Montrer que $I = J$. Calculer $K$.

**3)** Déduire $I$ du calcul de $I + \sqrt{2}K + J$. On pourra utiliser l'égalité suivante : $1 + t^4 = (1+t^2)^2 - 2t^2$.

**Planche 18 (2013, ENSAM — élève 5)**
Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $(C)$ : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

**1)** Montrer que $f$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

**2)** Montrer que $f$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

**3)** Montrer que $f$ est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre $(E)$ que l'on déterminera.

**4)** Résoudre $(E)$, puis $(C)$.

**Planche 19 (2013, ENSAM — élève 6)**
Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on pose $T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$ et $T(f)(0) = f(0)$.

**1)** Montrer que $T$ est un endomorphisme de $E$.

**2)** Montrer que $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

**3)** Montrer que si $T(f) = \lambda f$, alors $f$ vérifie une équation différentielle d'ordre 2.

**4)** Valeurs propres et sous-espaces propres de $T$.

**Planche 20 (2013, ENSAM — élève 7)**

**1)** Montrer que pour $x > 0$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x) = \dfrac{\pi}{2}$. Et pour $x < 0$ ?

**2)** Soit $c > 0$, nature de la suite de terme général $u_n = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(n^c)\right)$.

**3)** Équivalent de $(u_n)$.

**Planche 21 (2012, ENSAM — élève 0)**
Soit $(E)$ : $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$, pour $x \in ]0, +\infty[$

**1)** Résoudre $u'' - u = 0$.

**2)** Effectuer le changement de variable $y = \dfrac{z}{x^2}$.

**3)** Déterminer les solutions de $(E)$ développables en série entière au voisinage de 0.

**4)** En déduire toutes les solutions. Quelles sont les solutions ayant une limite à droite en 0 ?

**Planche 22 (2012, ENSAM — élève 1)**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $f$ et $g$ deux endomorphismes tels que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E$.

**1)** Montrer que $E$ est de dimension infinie.

**2)** Montrer que $f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$.

**3)** On suppose $g$ nilpotent. Montrer que $g = 0$.

**4)** Soit $E = \mathbb{R}[X]$, $f$ la dérivation et $g$ définie par $g(X^n) = X^{n+1}$. Montrer que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E$. Que peut-on en déduire sur $\mathbb{R}[X]$ ?

**Planche 23 (2012, ENSAM — élève 2)**
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3, soit $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f \circ f = 0$ et $f \neq 0$.

**1)** Montrer que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$

**2)** Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Planche 24 (2012, ENSAM — élève 4)**
Calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} x+\lambda & y+\lambda & \cdots & y+\lambda \\ z+\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y+\lambda \\ z+\lambda & \cdots & z+\lambda & x+\lambda \end{vmatrix}$$

**Planche 25 (2012, ENSAM — élève 5)**
Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(1,1,0)$ et de direction $u(1,1,1)$.

**1)** Déterminer une équation de la surface de révolution $S_1$ engendrée par la rotation de $\mathscr{D}$ autour de l'axe $(Oz)$.

**2)** Soit $S_2$ la surface d'équation $x^2+y^2=(z+1)^2+1$. Déterminer l'intersection de $S_1$ et de $S_2$.

(et d'autres questions désormais hors programme).

**Planche 26 (2012, ENSAM — élève 7)**
Soit $n \geqslant 1$, et $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n} = 0$.
Résoudre le système d'équations différentielles $X'(t) = AX(t)$, où $X \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2n})$.

**Planche 27 (2012, ENSAM — élève 8)**
Soit $a > 0$. À l'aide du polynôme $Q(X) = (1-X)^n - a^n$, trouver une forme réduite de :

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + a^2 - 2a\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

**Planche 28 (2012, ENSAM — élève 9)**
Soit $P(x) = x^3 - ax^2 + ax - a$. Notons $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les racines de $P$.

**1)** Déterminer la valeur de $a$ pour laquelle $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$ est minimale.

**2)** Donner alors l'expression de $P$ pour la valeur de $a$ trouvée. Ses racines sont-elles réelles ?

**Planche 29 (2012, ENSAM — élève 10)**
Pour $P$ et $Q$ dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose $<P,Q>= P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

**1)** Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire.

**2)** Montrer que $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ est une base orthogonale, puis en déduire une base orthonormée $\mathscr{C}$.

**3)** On pose $f(P)(X) = P(1-X)$ pour $P \in E$. Montrer que $f$ est un automorphisme de $E$ et déterminer $f^{-1}$. Que peut-on dire de $f$ ?

**4)** L'application $f$ est-elle une symétrie orthogonale ?

**Planche 30 (2012, ENSAM — OT 259)**
Calculer, suivant $n$, le déterminant $\Delta_n$ de la matrice de coefficients $a_{ij}$ définis par $a_{ij} = 1$ sur $|i-j| \leqslant 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon (on cherchera une relation de récurrence).

**Planche 31 (2012, ENSAM — OT 260)**
Montrer que $f_n(x) = x^n - \cos x$ admet un unique zéro sur $[0,1]$, noté $\alpha_n$. Étudier la suite $(\alpha_n)$ et calculer sa limite si elle existe.

**Planche 32 (2012, ENSAM — OT 261)**

**1)** Montrer que 1 est valeur propre de $M = \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ 1-a & 0 & a \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}$ et chercher un vecteur propre $U = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in ]0,1[^3$ vérifiant $x_0 + y_0 + z_0 = 1$.

**2)** Pour $a \in [0,1[$, $M$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$ ?

**3)** Pour quelles valeurs de $a$ la matrice $M$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ?

**Planche 33 (2012, ENSAM — OT 262)**

Soit $\varphi$ défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P)(X) = 2XP + P'$.

**1)** Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}[X]$.

**2)** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\varphi(Q) = X^n$. Montrer que, pour tout $k \leqslant n$ impair, $Q^{(k)}(0) = 0$, en déduire que $n$ est impair.

**3)** Montrer que, pour $n$ impair, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(Q) = X^n$.

**Planche 34 (2012, ENSAM — OT 263)**

Montrer que $P = X^n \sin t + X \sin(nt) + \sin((n-1)t)$ est divisible par $Q = X^2 - 2X\cos(t) + 1$ et exprimer le quotient en fonction de $t$ et $n$.

**Planche 35 (2012, ENSAM — OT 264)**

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x^4 + y^4 = 1$.

**1)** Montrer que $\mathscr{C}$ est bornée, étudier ses symétries.

**2)** Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(x_0, y_0)$ et en déduire les tangentes à $\mathscr{C}$ en un point de l'axe des abscisses et en un point de l'axe des ordonnées.

**3)** Représenter $\mathscr{C}$ et le cercle unité dans un même repère.

**4)** Déterminer la distance minimale entre l'origine et la courbe $\mathscr{C}$.

**Planche 36 (2012, ENSAM — OT 265)**

On donne $I_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{1 - 2\lambda\cos t + \lambda^2}\,\mathrm{d}t$.

**1)** Pour quelles valeurs de $\lambda$ l'intégrale $I_n$ est-elle définie ?

**2)** Exprimer $I_n(1/\lambda)$ en fonction de $I_n(\lambda)$.

**3)** Calculer $I_0(\lambda)$ et en déduire $(1+\lambda)I_0(\lambda) + I_1(\lambda)$. Donner la valeur de $I_1(\lambda)$.

**4)** Calculer $I_{n+1} + I_{n-1}$ en fonction de $I_n$.

**5)** En déduire une expression de $I_n$ en fonction de $n$.

## 3 Oral I – Cachan

**Planche 37 (2015, Cachan — élève 3)**

Fonctions homogènes de degré $\alpha$. Soit $f$ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $U = \mathbb{R}^2$ telle qu

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0 \qquad f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y)$$

**1)** Montrer que $f$ vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$$

**2)** On effectue le changement de variable $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times ]-\pi,\pi[$. Déterminer la nouvelle équation déterminée par $f$ après passage en polaire.

**3)** Réciproque :

Question de cours : Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace préhilbertien.

**Planche 38 (2013, Cachan — élève 1)**
Soit $f : P \mapsto (X^2-1)P' - (2nX)P$ pour $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.

**1)** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

**2)** Pour $n = 1$, écrire la matrice de $f$ dans la base canonique, déterminer ses valeurs propres. Est-elle diagonalisable ?

**3)** Valeurs propres et vecteurs propres dans le cas général.

**Planche 39 (2013, Cachan — élève 3)**

**1)** Soit $a \in ]0,1[$ et $I_a = \displaystyle\int_0^a \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

**a)** Convergence de $I_a$.

**b)** Prouver que $I_a = \displaystyle\int_0^a -\ln(t) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \ln t}{n+1}\,\mathrm{d}t$.

**c)** Calculer $I_{a,N} = \displaystyle\int_0^a -\ln(t) - \sum_{n=1}^{N} \frac{t^n \ln t}{n+1}\,\mathrm{d}t$.

**d)** Montrer que $t\ln t$ est bornée sur $]0,a[$.

**e)** En déduire que $I_{a,N} = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \int_0^a \frac{t^n \ln t}{n+1}\,\mathrm{d}t$ converge lorsque $N \to +\infty$.

**f)** Majorer $|I_a - I_{N,a}|$ puis en déduire $I_a$ comme somme d'une série.

**2)** Question de cours : Rappeler la définition d'un espace vectoriel. Donner la formule de changement de base pour un vecteur.

*Tous les élèves de l'après midi passés avec cette examinatrice ont eu le même exercice.*

**Planche 40 (2012, Cachan — élève 1)**

**1)** Soit $n$ un entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^(n+1)}$.

**a)** Montrer la convergence de $I_n$.

**b)** calculer $I_0$.

**c)** Donner une relation entre $I_n$ et $I_{n-1}$, en déduire $I_n$ en fonction de $n$.

**d)** La suite $I_n$ tend elle vers une valeur finie ? Si oui laquelle et pourquoi ?

**2)** Cours : Théorème du rang. Calculer la somme de 0 à $n$ de $\binom{n}{k}(-1)^k$. Deux matrices de même déterminant mais de trace différente sont-elles semblables ?

**Planche 41 (2013, Cachan — Mimard)**

**1)** **a)** Rappeler le théorème des accroissements finis.

**b)** Soit $f$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que $f(1) = f'(1) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall t \in [1-\eta; 1]$, $\quad |f'(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

**c)** Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^{1-\eta} t^n f(t)dt$.

**d)** Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^{1} t^n f(t)dt$.

**2)** Questions de cours : Théorème du rang ; Vecteur normal à une surface en cartésien et en paramétrique.

**Planche 42 (2013, Cachan — Mimard)**

**1)** On considère l'application $u : P \mapsto (X^2+1)P' - 2XP$ définie sur $\mathbb{R}[X]$.

**a)** Montrer que $u$ est un endomorphisme.

**b)** Calculer $u(X^n)$ pour tout entier naturel $n$.

**c)** Déterminer un entier $n$ tel que $u$ induise un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. On note $v$ cet endomorphisme induit.

**d)** Déterminer la matrice de $v$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

**e)** Trouver le noyau et l'image de $v$.

**f)** Soit $w$ défini par $w(aX^2 + bX + c) = a + c$. Calculer $w \circ v$. Montrer que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$ puis montrer l'égalité.

**2)** Question de cours : Taylor reste intégral pour une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, Nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$.

**Planche 43 (2013, Cachan — Mimard)**

**1)** Soit
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

**a)** Donner une condition sur $a_0$ pour que $C$ soit inversible.

**b)** Calculer le polynôme caractéristique de $C$.

**c)** Soit $\lambda$ une valeur propre de ${}^tC$. Déterminer l'espace propre associé.

**d)** Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme appartenant à $\mathbb{R}[X]$ soit le polynôme caractéristique d'une matrice carrée.

**e)** Montrer que les sous espace propre de $C$ sont de dimension 1. En déduire une condition de diagonalisabilité de $C$ portant sur les $(a_i)$.

**f)** Montrer qu'un endomorphisme est cyclique si et seulement si il existe une base dans la quelle sa matrice est du type de $C$. (Les deux dernières questions perdues et remplacées ? ? ?)

**g)** Montrer que $\psi_C(C) = 0$. Généralisation ? (Question rajoutée)

**2)** Questions de cours : [HP] ; définition d'un espace propre.

**Planche 44 (2013, Cachan — Lyon)**

**1)** Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & 0 \end{pmatrix}.$$

**a)** Trouver une relation entre $A$, $A^2$ et $I_n$.

**b)** $A$ est-elle inversible ?

**c)** $A$ est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres.

**d)** D'autres questions non traitées.

**2)** Questions de cours :

- Définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$
- Égalité des accroissements finis.
- Définition d'un isomorphisme.

**Planche 45 (2013, Cachan — Lyon)**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\Gamma$ la courbe paramétrée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= 4a(1 + 2\sin^2(t))\cos(t) \\ y(t) &= 3a\sin^3(t) \end{aligned}$$

**1)** Tracer $\Gamma$.

**2)** Calculer la longueur de $\Gamma$.

**3)** Une autre question non traitée.

**Planche 46 (2013, Cachan — Lyon)**

**1)** Soit $f$ et $g$ définies par :

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2 t}}\,\mathrm{d}t$$

**a)** Déterminer le domaine de définition de $f$ et $g$.

**b)** Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ et $g$.

**c)** Montrer que $f^2 + g$ est constante.

**d)** En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

**2)** Questions de cours :

- Définition d'une affinité orthogonale ;
- Formule de Taylor avec reste-intégral.

**Planche 47 (2013, Cachan — Lyon)**

**1)** **a)** Rappeler le théorème des accroissements finis.

**b)** Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que $f(1) = f'(1) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [1-\eta, 1],\ |f'(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

**c)** Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^{1-\eta} t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

**d)** Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^{1} t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

**2)** Questions de cours :

- Théorème du rang.
- Vecteur normal à une surface en cartésienne et en paramétrique.

**Planche 48 (2013, Cachan — Lyon)**

**1)** Soit $E$ un espace vectoriel et $u$ un endomorphisme de $E$. On note $C(u)$ le commutant de $u$, c'est-à-dire :

$$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \text{ t.q. } u \circ v = v \circ u\}$$

**a)** Montrer que $C(u)$ est un espace vectoriel contenant les polynômes en $u$.

**b)** Soit $F$ un sous-e.v. stable par $u$. Montrer que $F$ est stable par tout élément $v$ de $C(u)$.

**c)** On suppose que $u$ admet $n$ valeurs propres distinctes, avec $n = \dim E$. Montrer que les éléments de $C(u)$ sont diagonalisables dans une même base.

**2)** Questions de cours :

- Matrices orthogonales.
- Sommes de Riemann.

**Planche 49 (2013, Cachan — Lyon)**

**1)** Soit $A$ une matrice $n \times n$ telle que $A^2 = -I_n$.

**a)** Montrer que $n$ est pair.

**b)** Dans le cas où $n = 2$, montrer que $A$ est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**c)** Dans le cas général, montrer que $A$ est semblable à une matrice de la forme $\mathrm{diag}(B, B, \ldots, B)$.

**2)** Questions de cours :

- Formule de Taylor avec reste-intégral.
- Factorisation de $x^n - y^n$.

# 4 Petites Mines

Remarques générales :

- 2 exercices, vous les traitez tous les deux, dans l'ordre que vous voulez.
- L'examinatrice est directif sur l'usage du temps : demande de passer à l'exercice sur l'autre thème au bout d'un certain temps.
- Les exercices sont plus long que ceux de 2015 : il y avait un temps de préparation.

Remarques du président du jury : Si le candidat fait une erreur, puis se reprend (et explique son erreur), c'est très bien. Sinon, l'examinatrice donne des indication. Points perdus en fonction de la quantité d'indications, jusqu'à 8/20 s'il y a blocage, puis aide directe de l'examinatrice jusqu'à 5/20.

**Planche 50 (2015, Mines — élève 3)**
I) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

**1)** Montrer que $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont des suites adjacentes. En déduire la convergence de la série de terme général $u_n$.

**2)** Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$.

**3)** On pose $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{k-1}$. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ en fonction d'une intégrale. En déduire la somme $\sum u_n$.

II) Soit $\Sigma$ la surface d'équation $z^3 = xy$.

**1)** $\Sigma$ est-elle régulière ?

**2)** Déterminer les points tels que le plan tangent à $\Sigma$ en ces points contiennent la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2$ et $z = 2x + 4$.

**Planche 51 (2015, Mines — élève 4)**
I) Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de $I$.
II) Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit

$$\forall (f,g) \in E^2 \qquad \varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

**1)** Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire.

**2)** Soit $F = \{P \in E |\ \deg P \leqslant 2 \text{ et } P(0) = 0\}$. Déterminer une base orthonormée de $F$.

Commentaire de l'élève : « apprendre ses questions de cours ne s'avère pas toujours inutile (question 1) »

**Planche 52 (2015, Mines — élève 5)**
I) Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E$$

**1)** Montrer que, si $E$ est de dimension finie, alors les sommes sont directes.

**2)** Qu'en est-il en dimension infinie ?

II) Soit $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$, avec $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé.
Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente. Étudier la nature de $\sum u_n$, puis de $\sum \left(u_n - \dfrac{1}{n}\right)$.

**Planche 53 (2013, Mines — élève 1)**

**1)** Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x = t$, $y = t^2$, $z = -t$. On fait tourner cette courbe autour de l'axe $\Delta$ d'équation $x = y = z$. Déterminer l'équation de la surface.

**2)** Soit $E=\mathbb{R}_{2n}[X]$ et $f(P)(X)=(X^2-1)P'(X)-2nXP(X)$ où $P\in E$.

**a)** Montrer que $f$ est un endomorphisme.

**b)** Valeurs propres et vecteurs propres de $f$.

**Planche 54 (2013, Mines — élève 2)**

Soit $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}$, pour $n\in\mathbb{N}^*$

**1)** Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

**2)** Encadrer $S_n$.

**3)** Montrer que $\displaystyle\sum(-1)^{n+1}\frac{S_{n+1}}{2n+1}$ converge.

**Planche 55 (2013, Mines — élève 3)**

Soit $J=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

**1)** Calculer $J^2$.

**2)** $J$ est-elle inversible ?

**3)** $J$ est-elle diagonalisable ?

**4)** Montrer que $M=aI_3+bJ$ est diagonalisable. Indication : *Par une autre méthode que la méthode directe sur M ?*

**5)** Conditions pour que $M$ soit inversible ? Indication : *Sans calculs ?*

**Planche 56 (2013, Mines — élève 4)**

Soit $F: x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

**1)** Ensemble de définition de $F$.

**2)** Montrer que $F$ est continue sur son domaine de définition.

**3)** Montrer que $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.

**Planche 57 (2013, Mines — élève 5, partiel)**

**1)** Question de cours [HP] ; définition d'une matrice orthogonale.

**2)** Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqslant 0; x+y\leqslant 2; x-y\leqslant 2\}$ et $f(x,y)=(2x+2y-1)^3+8(x-y)^2-48x$. Extrema, existence de minima et maxima locaux, globaux.

**Planche 58 (2013, Mines — élève 6)**

**1)** Question de cours : [HP] ;énoncer le critère de D'Alembert.

**2)** Soit $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Donner les éléments caractéristiques de $A$ et la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

Et une autre question désormais HP.

**Planche 59 (2013, Mines — élève 7)**

**1)** Question de cours : [HP] ; critère de convergence des intégrales de Riemann en 0 et $+\infty$.

**2)** Donner les solutions développables en série entière sur un intervalle $I$ à préciser de l'équation différentielle :

$$xy''-(x+2)y'+2y=0$$

**3)** Donner la matrice de la rotation d'axe $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et d'angle $\pi/2$ dans la base canonique.

**Planche 60 (2013, Mines — élève 8)**

**1)** Question de cours : Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $I = ]-1, 1[$. Énoncer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre.

**2)** Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, définie par $f(P) = (X+1)^2(P'(1) + P(1))$

**a)** Montrer que c'est un endomorphisme. Noyau, image.

**b)** On considère $\widetilde{f} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ restriction de l'application $f$ précédente. Déterminer la matrice de $\widetilde{f}$ dans la base canonique. Est-elle diagonalisable ? Quelle est son rang (sans calcul).

**3)** Soit $\Sigma$ la surface $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 3 = 0$. Déterminer le plan tangent à $\Sigma$ contenant $D$ d'équation $z = 10$, $x = 2y$.

**Planche 61 (2013, Mines — élève 9)**

**1)** Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{4n}}{4n+1}$. Domaine de convergence de la série, expression à l'aide de fonctions usuelles.

**2)** Soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général 1.

**a)** La matrice $J$ est-elle diagonalisable ?

**b)** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} x^2+1 & x & \cdots & x \\ x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & x^2+1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A$ est diagonalisable, et donner son polynôme caractéristique (en évitant autant que possible les calculs).

**Planche 62 (2012, Mines — élève 1)**

**1)** On étudie la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.

**a)** Déterminer le rayon de convergence.

**b)** Écrire $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ sous la forme $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.

**c)** Écrire $f$ à l'aide de fonctions usuelles.

**2)** Soit $\Sigma$ la surface $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz = 1$

Question HP.

**a)** Symétries et plans de symétrie de $\Sigma$.

**b)** Plan orthogonal à la surface.

**Planche 63 (2012, Mines — élève 2)**

**1)** Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

**a)** Montrer que $A$ est diagonalisable et donner la matrice de passage $P$.

**b)** Soit $M$ appartenant à l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels telle que $M^2 + M = A$.

Montrer que $P^{-1}MP$ est diagonale.

**c)** Donner les solutions de $M^2 + M = A$.

**2)** Soit $x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t)$ et $y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t)$.

**a)** Tracer la courbe.

**b)** Calculer la longueur de la courbe.

**c)** Déterminer la courbure pour tout $t \in ]0, 2\pi/3[$.

**Planche 64 (2012, Mines — élève 3)**

**1)** Cours : [HP] ; énoncer le critère d'Alembert pour les séries entières.

**2)** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\varphi : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = AMA$.

**a)** Donner la matrice $\Phi$ de $\varphi$ dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

**b)** Calculer $\varphi(M)$ pour $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, puis pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**c)** $\Phi$ est-elle diagonalisable ?

**d)** Diagonaliser $\Phi$.

**3)** **a)** Résoudre $X^2 + (-2+3i)X - 2(1+2i) = 0$.

**b)** Résoudre $y'' + (-2+3i)y' - 2(1+2i)y = 2\cos(x)e^{2x}$.

**Planche 65 (2012, Mines — élève 4)**

Deux questions de cours.

**1)** Soit $X = (x, y, z, t)$ et $X' = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$, et $\varphi(X, X') = xx' + 2yy' + 3zz' + tt' + xy' + x'y + xz' + zx' + yz' + zy'$.

**a)** Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire.

**b)** Donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Question HP.

**Planche 66 (2012, Mines — élève 5)**

**1)** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\operatorname{Arctan}(xt)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

**a)** Montrer que $f$ est définie pour tout $x \geqslant 0$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

**b)** Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

**c)** Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution positive.

2e exercice HP.

**Planche 67 (2012, Mines — élève 6)**

**1)** **a)** Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ converge.

**b)** Calculer le rayon de convergence $R$ de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$ et calculer sa somme.

**c)** Déterminer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

**2)** Soit $f$ un endomorphisme de $E$.

**a)** Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ si et seulement si $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$, et que dans ce cas $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.

**Planche 68 (2012, Mines — élève 7)**

**1)** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

**a)** Montrer qu'il existe une base de $E$ telle que $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**b)** Déterminer les endomorphismes $g$ de $E$ tels que $fg = gf$.

**2)** **a)** Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$ converge pour $\alpha \in ]0,\pi[$.

**b)** En utilisant le changement de variable $x = \dfrac{1}{\cos t}$, calculer l'intégrale.

**Planche 69 (2012, Mines — élève 8)**

**1)** Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & -b & c \\ b & a-2c & b \\ c & -b & a+b \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Montrer que $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, calculer sa dimension. Est-ce une sous-algèbre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

**2)** Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $\dfrac{\cos(2n\pi/3)x^n}{n}$.

**Planche 70 (2012, Mines — élève 9)**

**1)** Pour $n \geqslant 2$ entier on pose $f_n$ la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

**a)** Montrer que $f_n(x) = 0$ a une unique solution, que l'on notera $x_n$.

**b)** Étudier les variations de $(x_n)$ pour tout $n \geqslant 2$.

**c)** Montrer que $(x_n)$ converge, calculer sa limite.

**d)** Trouver un équivalent de $(x_n)$ pour $n \to +\infty$.

**e)** Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 de $(x_n)$.

**2)** Chercher les matrices carrées réelles d'ordre $n$ vérifiant $A^tAA = I_n$.

**Planche 71 (2012, Mines — élève 10)**

**1)** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$, et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. Montrer que $p \leqslant n$.

**2)** Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de limite $\ell$ lorsque $x \to +\infty$.
Soit $y$ une solution de $y' + y = g$. Montrer que $y$ tends vers $\ell$ quand $x \to +\infty$.

**Planche 72 (2012, Mines — élève 11)**

**1)** Cours : Nature de la conique $z = x^2 + 2y^2$. Énoncer le critère de D'Alembert.

**2)** La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{\mathrm{sh}\ t}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$ ?

**3)** Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$

**a)** La matrice $A_n$ est-elle diagonalisable ?

**b)** Réduire $A_4$.

**c)** Réduire $A_n$.