Révisions : Géométrie et probabilités

Exercice 1 (OT 2009 — ENSAM, 267)
Trouver les extrema locaux de $f(x, y) = (2 + \cos x)(2 + \cos y)$.

Exercice 2 (2011, Centrale TSI — OT 263)
Étudier et tracer la courbe $\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) & = & \cos t \sin t \end{array} \right.$.
Calculer la longueur de la courbe entre les deux points de rebroussement.

Exercice 3 (OT 2009 — ENSAIT, 270)

1) Étude en $t = 1$ de la courbe d'équation $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \displaystyle\int_1^t \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\,\mathrm{d}u \\ y & = & \displaystyle\int_1^t \frac{u^2 - 1}{u^3 + 1}\,\mathrm{d}u \end{array} \right.$

2) Donner la limite ℓ de la suite $u_n = (n \sin \frac{1}{n})^n$ et la nature de la série de terme général $u_n - \ell$.

Exercice 4 (OT 2009 — petites mines, 273)
Étudier et tracer la courbe paramétrée d'équations $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{\sin^2(t)}{2 + \sin t} \\ y & = & \cos t \end{array} \right.$

Exercice 5 (2012, ENSAM — OT 264)
Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x^4 + y^4 = 1$.

1) Montrer que $\mathscr{C}$ est bornée, étudier ses symétries.

2) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(x_0, y_0)$ et en déduire les tangentes à $\mathscr{C}$ en un point de l'axe des abscisses et en un point de l'axe des ordonnées.

3) Représenter $\mathscr{C}$ et le cercle unité dans un même repère.

4) Déterminer la distance minimale entre l'origine et la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 6 (2012, ENSAM — élève, partiel)
Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(1, 1, 0)$ et de direction $u(1, 1, 1)$.

1) Déterminer une équation de la surface de révolution S_1 engendrée par la rotation de $\mathscr{D}$ autour de l'axe (Oz).

2) Soit S_2 la surface d'équation $x^2 + y^2 = (z + 1)^2 + 1$. Déterminer l'intersection de S_1 et de S_2.

Exercice 7 (2011, TSI — OT 268)
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Soit Σ la surface d'équation $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & t \cos\theta \\ z & = & a \sin\theta \end{array} \right.$ et Σ' la surface d'équation $a^2(x^2 - y^2) = x^2 z^2$.

1) Montrer que $\Sigma \subset \Sigma'$. Y a-t-il égalité ? On pourra considérer les points $A(0, 0, \alpha)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Déterminer les points singuliers de Σ et de Σ' (i.e. de deux façons).

3) Nature des courbes $\Sigma \cap (z = z_0)$ et $\Sigma \cap (x = x_0)$.

Exercice 8 (OT 2009 — petites mines, 278)

1) Déterminer la surface $\mathscr{S}$ constituée des points équidistants aux droites $\mathscr{D} : (x = 0, y = 0)$ et $\mathscr{D}' : (z = 0, x + y = a)$.

2) Existence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n - 1)}$.

Exercice 9 (2014, Cachan — OT)
Soit A et B deux points d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω.

1) Montrer que si M est sur le cercle $\mathscr{C}$ alors $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

2) Montrer la réciproque. On pourra se placer dans le plan complexe d'origine Ω et choisir $z_A = Re^{i\theta}$ et $z_B = Re^{-i\theta}$.

Exercice 10
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 11
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ.

1) Déterminer la probabilité que la valeur de X soit pair.

2) Quelle est la loi suivie par $X+Y$?

3) Reconnaître la loi de X sachant $X+Y=n$.

Exercice 12
Deux archers tirent chacun leur tour sur une cible. Le premier qui touche a gagné. Le joueur qui commence a la probabilité p_1 de toucher à chaque tour et le second la probabilité p_2 (avec $p_1, p_2 > 0$)

1) Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?

2) Montrer qu'il est quasi-certain que le jeu se termine.

3) Pour quelle(s) valeur(s) de p_1 existe-t-il une valeur de p_2 pour laquelle le jeu est équitable ?

Exercice 13
Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

1) Quelle est la probabilité que n premières boules tirées soient rouges ?

2) Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?

3) Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remet la boule accompagnée de trois autres boules de la même couleur ?

Exercice 14
Dans une population, la probabilité qu'une famille ait n enfants est estimée par la valeur

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} \text{ avec } \lambda \simeq 2{,}2$$

Quelle est la probabilité qu'une famille ait un nombre pair d'enfants.
En supposant les sexes équiprobables et l'indépendance des sexes des enfants à l'intérieur d'une même famille, donner une estimation de la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.

Vous êtes vivement encouragés à relire les exercices de la feuille « Probabilités ».

Exercice 15
On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité $1/2$, la couleur rouge sinon (bref, on ne suppose pas de 0 vert...). Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :

- il mise initialement 1 brouzouf sur la couleur noire ;
- s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.
- s'il perd, il double sa mise et rejoue.

1) On suppose la fortune du joueur infinie. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.

2) On suppose toujours la fortune du joueur infinie. Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?

3) Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n - 1$ brouzoufs ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?