

Exercice 1

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t = 0\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et en déterminer une base.

Exercice 2

Soit φ défini sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\varphi(M) = \text{Tr}(M)I_n + M$.

- 1) Vérifier que φ est un endomorphisme de E .
- 2) Déterminer le noyau et le rang de φ . L'endomorphisme est-il bijectif?
- 3) Vérifier que $\varphi^2 - (n+2)\varphi + (n+1)\text{id}_E = 0$. En déduire une expression de φ^{-1} .
- 4) Quelles sont les valeurs propres possibles de φ ? Déterminer les sous-espaces propres associés. φ est-elle diagonalisable?

Exercice 3 (ENSAM PT 2014, OT)

Soit $C \in \mathcal{M}_{n,1}$ une matrice colonne et $L \in \mathcal{M}_{1,n}$ une matrice ligne. Posons $A = CL - I_n$.

- 1) Peut-on avoir $A = I_n$?
- 2) Montrer que $A^2 = (LC - 2)A + (LC - 1)I_n$. À quelle condition A est-elle une symétrie?
- 3) Déterminer une équation du second degré vérifiée par λ , valeur propre de A . La matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 4

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

- 1) Montrer que $\text{Ker } u \subset \text{Ker } v \circ u$ puis que $\text{Ker } (v \circ u) = \text{Ker } u \iff \text{Ker } v \cap \text{Im } u = \{0\}$
- 2) Montrer que $\text{Im } (v \circ u) \subset \text{Im } v$ puis que $\text{Im } (v \circ u) = \text{Im } v \iff \text{Ker } v + \text{Im } u = E$
- 3) On suppose E de dimension finie. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

a) $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$	b) $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$	c) $\text{Im } u = \text{Im } u^2$
--------------------------------------	--	------------------------------------

Exercice 5 (ENSAM PT 2014, OT)

Soit E l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- 1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que si $P \in E$ alors $P' \in E$.
- 2) En déduire le degré maximal d'un polynôme de E , en étudiant un polynôme de degré 2.
- 3) Déterminer E .

Exercice 6 (CCP 2011 OT PSI)

Soit f un endomorphisme de E , espace vectoriel de dimension finie, tel que $f + f^4 = 0$. Montrer que

$$E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$$

Exercice 7 (D'après ENSAM)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, x_0 un vecteur non nul de E et φ une forme linéaire non nulle sur E . Pour tout $x \in E$ on pose $f(x) = \varphi(x)x_0$.

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de E , puis déterminer son rang.
- 2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur.

Exercice 8 (CCP 2011 OT PSI)

- 1) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre k . Montrer que $\text{id} - f$ est inversible et donner son inverse en fonction de f .
- 2) Soit $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ défini par $U(P) = P - P'$. Résoudre $U(P) = X^n$.

Exercice 9 (Mines – Ponts 2011 OT PSI)

Pourquoi la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \ddots & & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Trouver son inverse.

Exercice 10 (OT 2006 — CCP MP)

Soit a, b et c des réels, et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Dans cette question, et uniquement dans cette question, on suppose a, b et c tous non nuls. Déterminer le rang de A , en déduire la dimension du noyau de A .
- 2) La matrice est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Pouvait-on prévoir dès le 1) que 0 serait valeur propre ?

Exercice 11 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que A et T sont semblables.
- 2) Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12

Résoudre le système différentiel suivant :
$$\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + 3y - 4z \\ z' = 4x + y - 4z \end{cases}$$

Exercice 13

Réduire la conique et suivante, puis donner sa nature : $xy + 3x + 5y - 4 = 0$

Exercice 14 (D'après ENSAM PSI)

Déterminer la nature géométrique de l'application linéaire u canoniquement associée à

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 1 & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 (OT 2010 — ENSAM PSI)

On munit $E = \mathcal{C}^0([0, \pi])$ du produit scalaire $(f|g) = \int_0^\pi f(t)g(t) dt$.

- 1) Calculer $(\cos t | \sin t)$, $\|\cos t\|$, $\|\sin t\|$, $(t | \cos t)$ et $(t | \sin t)$.
- 2) Déterminer la projection orthogonale de l'application $t \mapsto t$ sur $\text{Vect}(\cos, \sin)$.
- 3) Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (a \cos t + b \sin t - t)^2 dt$.

Exercice 16 (OT 2010 — ENSAM PSI)

Soit $u \in \mathbb{R}^3$ et f définie sur \mathbb{R}^3 par $f(x) = x \wedge u$.

- 1) Montrer que f est linéaire. Déterminer le noyau et l'image de f .
- 2) En utilisant une base adaptée, déterminer $f \circ f$ et en déduire f^n .

Exercice 17 (OT 2006 — CCP MP)

- 1) Soit u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel. Si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de $u \circ v$, montrer qu'il l'est aussi de $v \circ u$.

- 2) Soit $P \in E = \mathbb{R}[X]$, $u(P) = P'$ et $v(P) = \int_0^x P(t)dt$. Trouver $\text{Ker } u \circ v$ et $\text{Ker } v \circ u$. Montrer que la propriété précédente reste valable pour $\lambda = 0$ si E est de dimension finie.