

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice dans la base canonique

$$M = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -8 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres (on vérifiera ses calculs à l'aide de la trace) et les sous-espaces propres de f .
- 2) Donner une base \mathcal{B}' de vecteurs propres, la matrice D de f dans cette base, et la matrice de changement de base P . Donner la formule liant M , P et D .
- 3) Déterminer la matrice de f^k dans la base \mathcal{B}' puis dans la base canonique.

Exercice 2

Montrer que $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable : Calculer le polynôme caractéristique et donner une matrice diagonale semblable à M sans calculer les sous-espaces propres.

Exercice 3

Calculer le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres des matrices suivantes et diagonaliser, lorsque c'est possible, ces matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), \quad B_6 = aA_6^2 + bA_6 + cI_3, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (PT 2008, B partie I)

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est donnée par

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A_φ . Déterminer les valeurs propres de cette matrice. Quelle est la dimension des sous-espaces propres ? À quelle matrice diagonale est-elle semblable ?
- 2) Déterminer une base (c_1, c_2, c_3) de vecteurs propres de φ .
- 3) On pose $D_1 = \text{Vect}(c_1)$. Montrer que D_1 est stable par φ .
- 4) On pose $P_1 = \text{Vect}(c_2, c_3)$. Montrer que P_1 est stable par φ .

Exercice 5 (PT 2007, A partie C)

On définit l'application Φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'$$

- 1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, déterminer $\Phi(X^k)$. En déduire $\text{Ker } \Phi$.
- 3) Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer la trace de Φ .
- 4) Quelles sont les valeurs propres de Φ ? L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 6 (OT 149 — 2011)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et f définie sur $\mathbb{R}_{2n}[X]$ par $f(P)(X) = (X - a)(X - b)P'(X) - (2nX - n(a + b) + c)P(X)$. Montrer que f est un endomorphisme, dont on déterminera les éléments propres (vecteurs propres et valeurs propres).

Exercice 7

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

- 1) Diagonaliser A , donner la matrice de passage et son inverse.
- 2) Déterminer toutes les matrices M' telles que $M'^2 = D$, où D est la matrice diagonale obtenue en 1.
- 3) En déduire toutes les matrices M telles que $M^2 = A$.

Exercice 8

Montrer qu'une somme (puis un produit) de matrices diagonalisables n'est pas forcément diagonalisable. On pourra chercher des matrices 2×2 triangulaires.

Exercice 9

Montrer que M et tM ont mêmes valeurs propres.

Exercice 10

Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$ admette 2 pour valeur propre. Réduire la matrice.

Exercice 11

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 12

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 13

Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = {}^tM$. Valeurs propres, sous-espaces propres (Indication : calculer φ^2). L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Trace de φ . Quelle est la nature géométrique de φ ?

Exercice 14 (d'après PT 2010, partie I)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, u_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $u_A(M) = MA$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- 1) La matrice A est-elle diagonalisable ?
- 2) La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser une base de vecteurs propres.
- 3) On pose :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- b) Calculer $u_A(E_{ij})$ pour tout $1 \leq i, j \leq 2$. Donner la matrice de u_A dans la base \mathcal{B} .
- c) L'endomorphisme u_A est-il diagonalisable ? Si oui, préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres de u_A (on rappelle qu'ici un vecteur propre sera une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

Exercice 15

Soient $E = \ell^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$ l'espace des suites réelles bornées et $\Delta : E \rightarrow E$ l'endomorphisme défini par

$$\Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n$$

Déterminer les valeurs propres de Δ .

Exercice 16

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions ayant une limite nulle en $\pm\infty$.

Soit u définie sur E par $u(f)(x) = f(2x)$.

Montrer que u est un endomorphisme, puis que u n'a pas de valeurs propres.

Indication : si $u(f) = \lambda f$, regarder $u^n(f)(x)$.

Exercice 17

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des fonctions ayant une limite finie en $+\infty$. Soit T définie sur E par $T(f)(x) = f(x+1)$.

Montrer que T est un endomorphisme, puis trouver les valeurs propres de T .

Exercice 18

Soit \mathcal{E} le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x' = 5x + y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = x - y + 3z \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 2 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Écrire le système sous forme matricielle $X' = AX$ et diagonaliser A .
- 2) Dans la base de vecteurs propres obtenue, résoudre le système d'équations différentielles $X'_1 = DX_1$.
- 3) En déduire les solutions X de \mathcal{E} à l'aide de la matrice de passage.

Exercice 19 (inspiré de ATS 2010)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $A =$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ dans la base } \mathcal{B}.$$

- 1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f , l'endomorphisme f est-il diagonalisable?
- 2) On note e'_1 un vecteur propre pour la plus grande des deux valeurs propres, et e'_2 un vecteur propre pour l'autre valeur propre. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e_3)$ est une base de E . Donner la matrice T de l'application f dans la base \mathcal{B}' ,
- 3) Calculer T^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer T^{-1} , puis T^n pour $n \in \mathbb{Z}$.
- 4) En déduire A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 20

Soit S le système
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = y_n + z_n \\ z_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \end{cases} \quad \text{avec} \quad (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \text{ fixés}$$

- 1) Écrire le système sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$. Exprimer X_n en fonction de A , de X_0 et de n .
- 2) À l'aide des résultats de l'exercice 19, exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et de n .

Exercice 21

Réduire les matrices de l'exercice 3 non diagonalisables.

Exercice 22 (suites récurrentes linéaires)

Le but de cet exercice est de prouver le théorème du cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Soit $(a_1, a_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a_0 \neq 0$. On cherche à décrire l'ensemble \mathcal{S} des suites (u_n) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1}$$

- 1) Écrire un système $X_{n+1} = AX_n$, où la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dépend de a_1 et a_0 , X_n de u_n et u_{n+1} .
- 2) Étude de A : Déterminer le polynôme caractéristique de A . Est-ce que A peut-être diagonalisable avec une seule valeur propre? Décrire les trois situations possibles, en donnant un critère.

3) Cas $\Delta > 0$: en posant $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ la matrice de passage, montrer que

$$u_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n$$

où C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$ dépendent des conditions initiales (u_0, u_1) .

4) Cas $\Delta < 0$: En se plaçant dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, montrer que

$$u_n = C_1 \lambda^n + C_2 \bar{\lambda}^n$$

où C_1 et $C_2 \in \mathbb{C}$ dépendent des conditions initiales (u_0, u_1) , et $\lambda = r e^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

Puis, en utilisant le fait que $u_n \in \mathbb{R}$, donc $\Re(u_n) = u_n$, retrouvez la formule du théorème.

5) Cas $\Delta = 0$. On admet que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Retrouvez la formule du théorème.

Exercice 23

Déterminer l'ensemble des suites récurrentes vérifiant

1) $u_{n+3} = -6u_n + 5u_{n+1} + 2u_{n+2}$

2) $u_{n+3} = -u_n - 3u_{n+1} - 3u_{n+2}$ (cf. ex 12)