Exercices : Probabilités

Exercice 1 (Tribu sur une partie de Ω)
Soient $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble Ω et Ω' une partie de Ω.
Vérifier que $\mathcal{T}' = \{A \cap \Omega' / A \in \mathcal{T}\}$ définit une tribu sur Ω'.

Exercice 2 (Tribu image)
Soient $f : \Omega \to \Omega'$ une application et $\mathcal{T}'$ une tribu sur Ω'. Vérifier que

$$\mathcal{T} = \left\{ f^{-1}(A') / A' \in \mathcal{T}' \right\}$$

définit une tribu sur Ω.
Cette construction servira au moment des variables aléatoires.

Exercice 3 (Probabilités usuelles sur $\mathbb{N}$)
Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

1) Soit $p \in]0,1[$. Posons $\left\{ \begin{array}{rcl} P(\{0\}) & = & 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(\{k\}) & = & p(1-p)^{k-1} \end{array} \right.$, puis pour $A \in \mathscr{A}$ $P(A) = \sum_{k \in A} P(\{k\})$.

- **a)** Montrer que P définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.
- **b)** Soit A l'évènement « $n \geqslant 10$ ». Calculer $P(A)$.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(\{k\}) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ étendu à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ comme ci-dessus.
Montrer que P définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.

Exercice 4

1) Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$.
Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\{n\}\right) = 0$$

2) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Montrer

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = 0$$

Exercice 5

1) Soit $\Omega = [\![1, 6]\!]^{\mathbb{N}}$ représentant un nombre dénombrable de lancers de dé indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons l'événement :

A_n : « Le n-ième lancer est un 4. »

Exprimer à l'aide de phrase puis à l'aide de quantificateurs les événements suivants :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n = \bigcup_{m \geqslant n} A_m = \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m \qquad \text{et} \qquad B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

2) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad B_n = \bigcup_{m \geqslant n} A_m$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathscr{A}$, puis que

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(B_n)$$

3) (Borel-Cantelli) On suppose de plus que $\sum_{n \geqslant 0} P(A_n)$ converge. Montrer que $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = 0$.

Exercice 6
Soit A et B deux évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1) Montrer que, si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

2) Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont.

Exercice 7

1) Considérons une famille ayant exactement deux enfants. Notons f les filles et g les garçons. Il y a 4 possibilités, en notant le plus âgée en premier :

$$ff, fg, gf, gg$$

On suppose qu'il y a équiprobabilité.

a) On suppose que l'un des enfants est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

b) Soit A : « La famille a au plus un garçon » et B : « Il y a des enfants des deux sexes ».
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

c) L'aînée est une fille (événement A') , quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ? A' et B sont-ils indépendants ?

2) Désormais la famille a exactement 3 enfants. Comparer les événements A_3 et B_3.

Exercice 8
Deux entreprises asiatiques produisent des « langues de belle-mère » en proportion égale. Cependant certaines sont défectueuses, dans la proportion p_1 pour la première entreprise, dans la proportion p_2 pour la seconde. Un client achète un sachet contenant n articles. Il souffle dans une première et celle-ci fonctionne : le voilà prêt pour fêter le nouvel an !

1) Quelle est la probabilité pour qu'une seconde langue de belle-mère choisie dans le même sachet fonctionne ?

2) Quelle est la probabilité que le sachet comporte k articles fonctionnels (y compris le premier extrait) ?

Exercice 9
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants.
Montrer que la probabilité qu'aucun des A_n ne soit réalisé est inférieure à

$$\exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\right)$$

On admettra que les $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants.
Indication : *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leqslant e^x$.*

Exercice 10 (Loi hypergéométrique)

1) On considère une urne contenant n boules, b blanches et $n - b$ noires. On tire p boules, sans remise. Soit X le nombre de boules blanches tirées. Donner la loi de X.

2) Application à l'estimation de la taille d'une population : des poissons dans un lac. On suppose que 1000 poissons sont capturés, marqués, puis relâchés. Une seconde pêche capture 1000 nouveaux poissons, dont 100 marqués. On suppose qu'entre les deux pêches le nombre de poisson n'a pas bougé, et qu'ils se sont parfaitement mélangés.

a) Quelle est la probabilité de l'événement « la seconde pêche comporte 100 poissons marqués », en appelant n le nombre de poissons au total dans le lac.

b) Quelle est cette probabilité si $n = 2000$?

Exercice 11
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

1) Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$, donner la loi de $X + Y$.

2) Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow X$, avec $p \in]0, 1[$, donner la loi de $X + Y$ puis de $\min(X, Y)$.

Exercice 12
Une armoire est constituée de trois tiroirs. On y range une chaussette verte, une rouge et une noire. On note X le nombre de chaussettes que contient le premier tiroir et N le nombre de tiroirs vides. Déterminez la loi conjointe puis les lois marginales du couple (X, N). Les deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 13
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$P\left(X = j, Y = k\right) = \frac{a}{j!k!}$$

où $a \in \mathbb{R}$ tel que P soit une loi de probabilité.

1) Déterminer la valeur de a.

2) Reconnaître les lois marginales de X et Y.

3) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 14
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 15
On lance 3 dés à 6 faces jusqu'à obtenir trois six, sachant que dès qu'un dé tombe sur six, on arrête de le lancer, et on se contente de relancer les dés n'ayant pas encore donné un six. On note X_1 le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir un six sur le premier (et de façon similaire X_2 et X_3 pour les deux autres dés).
Les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes.

1) Quelles sont les lois des variables X_1, X_2 et X_3 ?

2) Déterminer $P(X_i \leqslant k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ donné.

3) Soit X la variable égale au nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir 3 six. Calculer $P(X \leqslant k)$.

4) En déduire la loi de la variable X.

5) Déterminer, si elle existe, l'espérance de X.

Exercice 16
Soit $\alpha \in]1, +\infty[$, et X une variable aléatoire discrète de loi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad P(X = n) = \frac{a}{n^\alpha}$$

où $a \in \mathbb{R}$ tel que P soit une loi de probabilité.

1) Déterminer la valeur de a.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que X soit d'espérance finie.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que X admette une variance.

Exercice 17
On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
Modélise une succession de lancers de pile ou face, avec probabilité p d'obtenir pile.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $U_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.
Dans la modélisation précédente, Y_n est un succès si les lancers n et $n+1$ donnent pile. U_n est le nombre de succès de Y_n entre 1 et n.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de Y_n puis calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

2) Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < m$. Les variables Y_n et Y_m sont-elles mutuellement indépendantes ? Calculer $\mathrm{Cov}\,(Y_n, Y_m)$.

3) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(U_n)$ et $V(U_n)$.

Exercice 18
Un signal est diffusé via un canal et un bruit vient s'ajouter à la transmission. Le signal est modélisé par une variable aléatoire discrète réelle S d'espérance m_S et de variance σ_S^2 connues. Le bruit est modélisé par une variable B indépendante de S d'espérance nulle et de variance $\sigma_B^2 > 0$.
Après diffusion, le signal reçu est $X = S + B$.
On cherche à déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que $Y = aX + b$ soit au plus proche de S i.e. pour que l'espérance $E\Big[(Y-S)^2\Big]$ soit minimale.

1) Écrire $E\Big[(Y-S)^2\Big]$ en fonction de l'espérance et de la variance de $Y - S$.

2) Calculer l'espérance et la variance de $Y - S$ en fonction de m_S, σ_S et σ_B.

3) Minimiser $\Big(E(Y-S)\Big)^2$ puis en déduire les a et b optimaux.

Exercice 19
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad P(X = 2n+1) = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

1) Calculer sa série génératrice à l'aide de fonctions usuelles.

2) En déduire son espérance et sa variance.

Exercice 20
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1) Calculer $E\left(X(X-1)\dots(X-r+1)\right)$.

2) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices. En déduire $V\left(X(X-1)\dots(X-r+1)\right)$

Exercice 21
On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $q = 1 - p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n \geqslant 1}$.
Pour $m \in \mathbb{N}^\star$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m = k \Leftrightarrow X_1 + \cdots + X_k = m \text{ et } X_1 + \cdots + X_{k-1} < m$$

1) Rappeler le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ (on précisera le rayon).
En déduire, en explicitant (avec des « ... ») le coefficient du binôme, que

$$\forall t \in]-1, 1[\qquad \frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m-1}{m-1} t^n$$

2) Reconnaître la loi et donner la série génératrice de S_1.

3) Déterminer la loi de S_m. En déduire sa série génératrice, puis son espérance.

4) À l'aide d'une somme de variables aléatoires discrètes de même loi, égales en loi à S_m, retrouver $E(S_m)$ et déterminer $V(S_m)$.

Exercice 22
Une usine confectionne des pièces dont une proportion p est défectueuse. On effectue un prélèvement de n pièces et on note Z_n la variable aléatoire discrète représentant le nombre de pièces défectueuses dans ce prélèvement. On veut approcher p par la proportion $\dfrac{Z_n}{n}$ de pièces défectueuses sur cet échantillon.
Remarque : dans ce problème on suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande. Par conséquent, le prélèvement peut être considéré comme une suite de n tirages indépendants avec remise.

1) Quelle est la loi de Z_n ?

2) En déduire sa moyenne et sa variance.

3) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\dfrac{Z_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

4) En déduire une condition sur n pour que l'approximation donne une valeur approchée de p à 0.01 près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.