Exercices : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1
La fonction suivante est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$: $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$?

Exercice 2
On définit la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leqslant y \\ y(1-x) & \text{si } y < x \end{cases} \end{array}$

1) Montrer que f est continue sur $[0,1]\times[0,1]$ (<u>Indication</u> : *Chercher une expression de f sans « si »*).

2) Montrer que f admet un maximum et un minimum sur $[0,1]\times[0,1]$, les déterminer.

Exercice 3
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4
Soit $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\psi(x,y) = (x-y, x+y)$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Déterminer $\dfrac{\partial(f\circ\psi)}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial(f\circ\psi)}{\partial y}$.

Exercice 5
On note $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$. Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x,y) \in \Omega \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - y^2$$

On utilisera le changement de variable $u = x+y$ et $v = xy$.

Exercice 6
Soit $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

1) Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur leur ensemble de définition, puis étudier leurs extrema locaux.

2) Étudier les extrema globaux de f sur $\overline{D(0,4)}$ et de g sur $K = [0,1]^2$

Exercice 7 (OT 2011 — ENSAM PT)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par

$$f : (x,y) \mapsto xy\ln(x^2+y^2)$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en $(0,0)$. Tracer la surface (avec python) et déterminer ses extrema.

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

On commencera par donner la structure de l'espace des solutions, et on utilisera le changement de variable $x = u - v$ et $y = v$.