Exercices : Matrices

Exercice 1 (PT 2009, A extraits)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de E fixée. On considère l'application linéaire f ayant pour matrice, dans la base $\mathscr{B}$,

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est un projecteur. (Quel est son rang ?)

2) Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 2
Calculer le rang, le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice, dans la base canonique,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer le noyau, le rang et l'image de f. Construire $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base du noyau, complétée en une base de l'image puis en une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice M' de f dans cette base, et la matrice de passage.

Exercice 4
Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées symétriques de taille n et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrée antisymétriques ($M^T = -M$) de taille n.

1) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On précisera leur dimension.

2) Montrer que

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

Exercice 5
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixés. Soit f définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = -M + \mathrm{Tr}\,(M)A$.

1) Montrer que f est un endomorphisme.

2) On suppose que $\mathrm{Tr}\,(A) \neq 1$, montrer que f est bijective.

3) On suppose désormais que $\mathrm{Tr}\,(A) = 1$, déterminer $\mathrm{Ker}\ f$. Montrer que $\mathrm{Im}\ f = \{M \mid \mathrm{Tr}\ M = 0\}$.

4) Résoudre $f(X) = B$.

Exercice 6
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et u_A défini par $u_A(M) = AM$ pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1) Montrer que u_A est un endomorphisme. Noyau et image de u_A.

2) Déterminer la matrice de u_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3) Écrire la matrice de $u_A : M \mapsto AM$ lorsque A est une matrice quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

4) Dans le cas où A est quelconque, montrer que u_A laisse stable $\mathrm{Vect}\,(E_{1,1}, E_{2,1})$ et $\mathrm{Vect}\,(E_{1,2}, E_{2,2})$.

Exercice 7 (difficile)

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout i, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout i, $\sum_j |a_{i,j}| < 1$. Montrer que l'équation $X = AX + B$, où $B \in \mathbb{C}^n$ est fixé, admet une solution unique.

3) Soit P une matrice stochastique — c'est-à-dire une matrice réelle à coefficients positifs vérifiant $\forall i\ \sum_j p_{i,j} = 1$. Montrer que $\sup\{\lambda \mid (P - \lambda I_n) \text{ n'est pas inversible}\} = 1$ et que ce sup est atteint.
Montrer que les puissances d'une matrice stochastique sont stochastiques.