

Exercice 1 (Linéaire d'ordre 1, raccords)

On considère l'équation différentielle

$$ty' + (t - 1)y = t^2 \tag{1}$$

- 1) Déterminer l'ensemble des solutions sur chacun des intervalles où Cauchy-Lipschitz s'applique.
- 2) Déterminer les solutions \mathcal{C}^1 de (1) sur \mathbb{R} .
- 3) Tracer quelques courbes intégrales. Que remarque-t-on en $t = 0$? Combien a-t-on de solution satisfaisant $y(0) = 0$?
- 4) Déterminer les solutions de classe \mathcal{C}^1 et solutions développables en série entière de $ty' + (t - 2)y = 0$.

Exercice 2

Même démarche pour résoudre les équations différentielles suivantes :

$$1) \quad ty' - \frac{y}{2} = t^2 \ln |t| \qquad 2) \quad t(t - 1)y' + 2y = 3t$$

Exercice 3 (maple)

- 1) Résoudre l'équation différentielle $t(t^2 + 1)y' - (t^2 - 1)y = -2t$. Existe-t-il des solutions sur \mathbb{R} ?
Montrer qu'il existe un point $A(t, y)$ tel que toutes les tangentes aux courbes intégrales au point d'abscisse 2 soient concourante en A . On pourra tracer des courbes intégrales.
- 2) Résoudre l'équation différentielle $ty' + (1 - t)y = \frac{te^t}{t^4 + 1}$. Tracer des courbes intégrales. Existe-t-il des solutions sur \mathbb{R}^* prolongeable par continuité à \mathbb{R} ?

Exercice 4 (Linéaires d'ordre 2, changement de variable)

Résoudre, à l'aide des changements de variable proposés, les équations différentielles suivantes :

$$1) \quad 4ty'' + 2y' - y = 0 \text{ et } t = x^2 \qquad 2) \quad (1 - t^2)y'' - ty' + y = 0 \text{ et } t = \cos x$$

$$3) \quad (1 + t^2)^2 y'' + 2t(1 + t^2)y' + my = 0 \text{ où } m \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5 (Linéaires d'ordre 2, cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène)

Résoudre, en cherchant une solution particulière de l'équation homogène (changement de fonction y), les équations différentielles suivantes :

- 1) $t^2 y'' + 4ty' + 2y = \ln(1 + t)$, solution particulière de la forme $t \mapsto t^\alpha$.
- 2) $ty'' + 2y' - ty = 0$, solution particulière développable en série entière.
- 3) $t^2 y'' + t(t + 1)y' - y = 0$, solution particulière développable en série entière.

Exercice 6

Résoudre l'équation différentielle $2t(1-t)y'' + (3-5t)y' - y = 0$ en la mettant sous la forme $\frac{d}{dt}(g(t)y' + h(t)y) = 0$.

Exercice 7 (Linéaire d'ordre 2 à coefficients constants : révisions de sup)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$1) \quad y'' + 2y' + y = te^t \qquad 2) \quad y'' + 4y' + y = \cos(t)e^{-t} \qquad 3) \quad y'' + y' + y = t^2 + e^t$$

$$4) \quad y'' - 6y' + 9y = e^{3t} + \sin t \qquad 5) \quad y'' + y = \tan^2(t) \text{ sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ avec } y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Exercice 8 (Systèmes : révisions d'algèbre linéaire)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
- 2) Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 2y(t) \end{cases}$

Exercice 9

Résoudre les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} x' &= -y + \sin(\alpha t) \\ y' &= x - \cos(\alpha t) \end{cases} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$2) \begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= y \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x' &= x + y - z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= x + z \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x' &= x + 2y - z + t \\ y' &= 2x + 4y - 2z \\ z' &= -x - 2y + z \end{cases}$$

Exercice 10 (Variables séparables)

Construire les courbes intégrales des équations différentielles suivantes. Lorsque l'on donne des conditions initiales, déterminer l'unique solution maximale du problème de Cauchy associé.

$$1) y' = \operatorname{sh}(y), \text{ cas } y(1) = 1$$

$$2) y' = e^{-x} + e^{y-x}$$

$$3) (1 + x^2)y' + 1 + y^2 = 0$$

$$4) y' = \frac{\tan y}{x}, \text{ cas } y(1) = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 11 (Systèmes autonomes)

On considère l'équation différentielle $(x + 2y)y' = -\sqrt{1 - y^2}$.

1) Montrer que les trajectoires du système différentiel autonome

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= -\sqrt{1 - y^2} \end{cases}$$

sont des courbes intégrales de cette équation différentielle.

2) Résoudre ce système et exprimer x en fonction de y pour ces solutions.

Exercice 12

Soit $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la famille d'hyperboles d'équation cartésienne $xy = \lambda$.

1) Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 dont les courbes \mathcal{C}_λ sont les courbes intégrales.

2) Déterminer une famille de courbes (Γ_μ) telle que les tangentes à \mathcal{C}_λ et Γ_μ soient orthogonales en tout point de $\mathcal{C}_\lambda \cap \Gamma_\mu$, quels que soient λ et μ .