Exercices : Équations Différentielles

Exercice 1 (Linéaire d'ordre 1, raccords)
On considère l'équation différentielle
$$ty' + (t-1)y = t^2 \tag{1}$$

1) Déterminer l'ensemble des solutions sur chacun des intervalles où Cauchy-Lipschitz s'applique.

2) Déterminer les solutions $\mathscr{C}^1$ de (1) sur $\mathbb{R}$.

3) Tracer quelques courbes intégrales. Que remarque-t-on en $t=0$? Combien a-t-on de solution satisfaisant $y(0)=0$?

4) Déterminer les solutions de classe $\mathscr{C}^1$ et solutions développables en série entière de $ty' + (t-2)y = 0$.

Exercice 2
Même démarche pour résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $ty' - \dfrac{y}{2} = t^2 \ln|t|$ **2)** $t(t-1)y' + 2y = 3t$

Exercice 3

1) Résoudre l'équation différentielle $t(t^2+1)y' - (t^2-1)y = -2t$. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?
Montrer qu'il existe un point $A(t,y)$ tel que toutes les tangentes aux courbes intégrales au point d'abscisse 2 soient concourante en A. On pourra tracer des courbes intégrales.

2) Résoudre l'équation différentielle $ty' + (1-t)y = \dfrac{te^t}{t^4+1}$ Tracer des courbes intégrales. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}^*$ prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$?

Exercice 4 (Linéaires d'ordre 2, changement de variable)
Résoudre, à l'aide des changements de variable proposés, les équations différentielles suivantes :

1) $4ty'' + 2y' - y = 0$ et $t = x^2$ **2)** $(1-t^2)y'' - ty' + y = 0$ et $t = \cos x$
3) $(1+t^2)^2y'' + 2t(1+t^2)y' + my = 0$ où $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 (Linéaires d'ordre 2, cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène)
Résoudre, en cherchant une solution particulière de l'équation homogène (changement de fonction y), les équations différentielles suivantes :

1) $t^2y'' + 4ty' + 2y = \ln(1+t)$, solution particulière de la forme $t \mapsto t^\alpha$.

2) $ty'' + 2y' - ty = 0$, solution particulière développable en série entière.

3) $t^2y'' + t(t+1)y' - y = 0$, solution particulière développable en série entière.

Exercice 6
Résoudre l'équation différentielle $2t(1-t)y'' + (3-5t)y' - y = 0$ en la mettant sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(t)y' + h(t)y) = 0$.

Exercice 7 (Linéaire d'ordre 2 à coefficients constants : révisions de sup)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' + 2y' + y = te^t$ **2)** $y'' + 4y' + y = \cos(t)e^{-t}$ **3)** $y'' + y' + y = t^2 + e^t$
4) $y'' - 6y' + 9y = e^{3t} + \sin t$ **5)** $y'' + y = \tan^2(t)$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ avec $y(0)=0$, $y'(0)=1$

Exercice 8 (Systèmes : révisions d'algèbre linéaire)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2) Résoudre le système différentiel $\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) + 3y(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) + 2y(t) \end{array} \right.$

Exercice 9
Résoudre les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -y+\sin(\alpha t) \\ y' & = & x-\cos(\alpha t) \end{array}\right.$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

2) $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+y \\ y' & = & y \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+y-z \\ y' & = & -x+2y+z \\ z' & = & x+z \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+2y-z+t \\ y' & = & 2x+4y-2z \\ z' & = & -x-2y+z \end{array}\right.$

Exercice 10

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)\right) \mathrm{d}t$.

1) Montrer que la fonction $F : x \mapsto F(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Parité. Réduction du domaine d'étude.

2) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.

3) Montrer que F est solution d'une équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) En déduire une expression de F à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 11

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \,\mathrm{d}t$

1) Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

2) Justifier que F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$.

3) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.