Exercices : Déterminants

Exercice 1
Calculer les déterminants des matrices suivantes, sous la forme la plus factorisée possible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad xI_3 - A \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad xI_3 - B \text{ où } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix} \qquad (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique (c'est-à-dire $M^T = -M$). Montrer que n impaire entraîne M non inversible.

Exercice 3
Soit A, B et C des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & A+C-B \end{pmatrix} = \det(A+C)\det(A-B)$$

Exercice 4 (OT 237 — 2011 PT)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer $\det \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ en fonction de $\det A$ et a, b, c, d.

Exercice 5
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} c & a & b \\ b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.

1) Montrer que J est inversible.

2) Calculer AJ, en déduire $\det(AJ)$ puis $\det(A)$.

Exercice 6
On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}JP = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

En déduire $\det(\alpha I_n + \beta J)$.