Exercices : Courbes

Exercice 1
Parmi les ensembles suivants, préciser (sans preuve) lesquels sont des ouverts et lesquels sont des fermés.

1) $\{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x-a\| \geqslant 2\}$
2) $\{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x-a\| > 5/3\}$
3) F sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$
4) $]0,1[$, $[0,1[$, $[0,1]$ et $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$
5) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\}$
6) $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ et $\mathbb{R}^2-(\mathbb{R}_- \times \{0\})$ dans $\mathbb{R}^2$.

Précisez aussi lesquels sont bornés.

Exercice 2 (Cantor)
Soit $C_0=[0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1}=\dfrac{C_n}{3} \cup \left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{C_n}{3}\right)$.

1) Expliciter C_1, C_2. Pour $n \in \mathbb{N}$, C_n est-il fermé ? ouvert ?

2) Que peut-on dire de l'ensemble de Cantor $K_3=\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$?

3) Montrer que $K_3=\left\{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n} \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in \{0,2\}\right\}$.

Exercice 3
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f,g \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}^2)$. Montrer que $\varphi=\det(f,g)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer φ'.

Exercice 4
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $t \in I$, $f(t) \neq 0$ et que $f''(t)$ est colinéaire à $f(t)$ (l'accélération est colinéaire à $f(t)=\overrightarrow{OM(t)}$).

1) Calculer la dérivée de la fonction $f \wedge \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

2) On suppose que $f'(0)$ n'est pas colinéaire à $f(0)$. Montrer que la courbe représentative de f est contenue dans un plan que l'on précisera.

3) Que se passe-t-il si la vitesse initiale $f'(0)$ est colinéaire à $f(0)$?

Exercice 5
Soit Γ la courbe d'équation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t^2 \\ y & = & 2t^3 \end{array}\right.$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1) Étude et tracé de Γ (cf. plan du cours).

2) Déterminer les droites à la fois tangentes et normales à la courbe.

Exercice 6 (Astroïde)
Soit Γ la courbe d'équation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \cos^3 t \\ y & = & \sin^3 t \end{array}\right.$ pour $t \in \mathbb{R}$. Étude et tracé de Γ.

Exercice 7 (D'après E3A PC 2012 — Deltoïde)
Soit Γ la courbe d'équation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 3-2\cos(t)-\cos(2t) \\ y(t) & = & 2\sin(t)-\sin(2t) \end{array}\right.$$

1) Réduire le domaine d'étude (en précisant les transformations). On note Γ_1 la partie de la courbe correspondant à $t \in [0,\pi]$.

2) Montrer que la courbe Γ_1 présente deux points singuliers, pour $t=0$ et $t=t_0$ que l'on déterminera. On note I le point de paramètre t_0.
Donner l'allure de la courbe au voisinage des points O et I (équation des tangentes, position relative de la courbe et des tangentes). On note T la tangente au point I.

3) Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles de centre $\Omega=(3,0)$ et de rayons respectifs $R_1=3$ et $R_2=1$.

  a) Vérifier que la droite T passe par Ω. Déterminer $\Gamma \cap \mathscr{C}_1$.

b) Soit J le point de Γ de paramètre $\dfrac{\pi}{3}$. Montrer que Γ est tangente à $\mathscr{C}_2$ au point J.

4) Tracer les courbes Γ, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et T.

5) Montrer que la courbe Γ est invariante par la rotation de centre Ω et d'angles $\dfrac{2\pi}{3}$.

Indication : *on utilisera des affixes complexes.*

6) Calculer la longueur de Γ.

Exercice 8
Étudier les courbes suivantes :

1) $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = t + \dfrac{1}{2t^2} \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x = (t-1)^3 e^{-t} \\ y = t(t-1)^2 e^{-t} \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x = \ln(t) - t \\ y = \operatorname{Arctan}(t-1) + \dfrac{t^2}{2} - 2t \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^2-1} \\ y = \dfrac{1}{(t-1)(t-2)} \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x = (\sin t)(1 + 2\cos^2 t) \\ y = (\cos t)(1 + 2\sin^2 t) \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t-2}{(t-1)^2} \end{cases}$

Exercice 9
Soit $\mathscr{C}$ la courbe $\begin{cases} x = t^2 + \dfrac{a}{t} \\ y = (t+1)^2 + \dfrac{b}{t} \end{cases}$.

1) Soit u fixé. Déterminer a et b tels qu'en $t = u$, $\mathscr{C}$ ait un point de rebroussement.

2) Déterminer, lorsque u parcourt $\mathbb{R}$, le lieu de ce rebroussement.

3) Tracer $\mathscr{C}$ pour $u = 1$.

Exercice 10 (Courbe de la Crêpe)
Soit $\mathscr{C}$ la courbe $\begin{cases} x = a\sin t \\ y = a\cos t \\ z = b\sin 2t \end{cases}$, avec $a, b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\mathscr{C}$ est tracée sur le cylindre $x^2 + y^2 = a^2$. Équation paramétrique des tangentes en $t = -\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 11
Soit $\mathscr{C}$ la courbe $\begin{cases} x = a\left(t - \dfrac{t^3}{3}\right) \\ y = at^2 \\ z = a\left(t + \dfrac{t^3}{3}\right) \end{cases}$ On appelle *hélice* une courbe dont la tangente en chaque point fait un angle constant avec une direction donnée. Montrer que la tangente fait un angle fixe avec (Oz). Nature de $\mathscr{C}$. Équation du plan osculateur en $M(t)$.

Exercice 12 (Hyperbole — PT 2008 B)
Le plan euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1) Soit Γ la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto M(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = 2\operatorname{ch}(t) \\ y(t) = 3\operatorname{sh}(t) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Étudier les symétries de Γ, puis les variations de x et y.

b) Former une équation cartésienne de chacune des asymptotes de Γ. Tracer proprement la courbe Γ et ses asymptotes.

c) Déterminer le repère de Frenet $(M(t), \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ au point $M(t)$ de la courbe Γ.

d) Déterminer le rayon de courbure $R(t)$ au point $M(t)$ de la courbe Γ.

e) Déterminer une équation de la développée de Γ.

2) On note Γ' la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto C(t)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{13}{2}\,\mathrm{ch}^3(t) \\ y(t) & = & -\dfrac{13}{3}\,\mathrm{sh}^3(t) \end{array}\right.$$

- **a)** Montrer que Γ' possède un axe de symétrie.
- **b)** Étudier la courbe Γ' au point $C(0)$.
- **c)** Étudier les branches infinies de Γ' et comparer leurs directions à celles des asymptotes de Γ.
- **d)** Tracer Γ' sur la même figure que Γ.
- **e)** Montrer les relations

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ch}\,(2t) & = & \mathrm{ch}^2(t) + \mathrm{sh}^2(t) = 2\,\mathrm{ch}^2(t) - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2(t) + 1 \\ \mathrm{sh}\,(2t) & = & 2\,\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{ch}\,(t) \end{array}$$

En déduire la longueur de l'arc Γ' entre $t = 0$ et $t = 1$.

Exercice 13 (Cycloïde)
Soit Γ la courbe représentant la trajectoire d'un point fixé à un cercle de rayon r qui roule sans glisser sur l'axe des abscisses.

1) En utilisant des affixes complexes, montrer que Γ a pour représentation paramétrique

$$x(t) = r(t - \sin t) \qquad \text{et} \qquad y(t) = r(1 - \cos t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

2) On suppose désormais $r = 1$. Construire Γ.

3) Expliciter une abscisse curviligne sur Γ. Calculer la longueur totale d'une arche de Γ.

4) Pour $t \in \mathbb{R}$ hors d'un point de rebroussement, préciser le repère de Frenet et le rayon de courbure de Γ au point de paramètre t.

5) Construire la développée de Γ. En déduire une développante.

Exercice 14 (Cycloïde – une autre)
Soit Γ la courbe ayant pour représentation paramétrique

$$x(t) = t + \sin t - 4\sin\frac{t}{2} \qquad \text{et} \qquad y(t) = 3 + \cos t - 4\cos\frac{t}{2} \qquad t \in [0, 4\pi]$$

1) Construire Γ.

2) Expliciter une abscisse curviligne sur Γ. Calculer la longueur totale de Γ.

3) Pour $t \in]0, 4\pi[$, préciser le repère de Frenet et le rayon de courbure de Γ au point de paramètre t.

4) Construire la développée de Γ.

Exercice 15 (D'après écrit PT — Chaînette)
Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne $y = \mathrm{ch}\,(x)$.

1) Calculer le rayon de courbure en un point A d'abscisse α de la courbe $\mathscr{C}$.

2) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

3) Soit A_1 et A_2 deux points de $\mathscr{C}$, d'abscisses respectives α_1 et α_2, tels que les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points soient orthogonales.
Si on note R_1 et R_2 les rayons de courbures aux points A_1 et A_2, calculer $\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$.

4) Déterminer les développantes de $\mathscr{C}$ puis tracer celle qui admet l'axe (Ox) comme asymptote.

Exercice 16
Déterminer l'enveloppe de la famille $D_t : (t+1)x + (t - 2t^2)y + t^2 = 0$ $(t \in \mathbb{R})$.

Exercice 17
Soit Γ la courbe admettant un paramétrage $x(t) = \dfrac{2}{t^2+1}$ et $y(t) = \dfrac{t^2-1}{t(t^2+1)}$.
Pour $t \notin \{0, 1, -1\}$, on désigne par Δ_t la droite passant par $M(t)$ et $M(1/t)$.

1) Déterminer l'enveloppe de la famille $(\Delta_t)_t$.

2) Montrer que cette enveloppe est contenue dans une conique que l'on déterminera.