Devoir de Mathématiques numéro 6

Correction

Exercice 1

- Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles, il y a trois cas :
  - Si $d(\mathscr{D},\mathscr{D}') > a$, l'ensemble cherché est vide.
  - Si $d(\mathscr{D},\mathscr{D}') = a$, l'ensemble cherché est constitué de tous les points entre $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
  - Si $d(\mathscr{D},\mathscr{D}') < a$, l'ensemble cherché est constitué de deux droites Δ et Δ' situés à une distance $(a - d(\mathscr{D},\mathscr{D}'))/2$ à l'extérieur de $\mathscr{D}$ ou de $\mathscr{D}'$.
- Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes, notons O leur intersection et considérons le repère orthonormé centré en O et d'axe les bissectrices du couple $(\mathscr{D},\mathscr{D}')$.

  Par construction, aucune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ n'est verticale, et elles passent toutes les deux par l'origine. Depuis, comme l'une est symétrique de l'autre selon l'axe (Ox), elles ont pour équation respective
  $$y = mx \qquad \text{et} \qquad y = -mx$$
  Soit $M(x,y)$ un point du plan tel que $d(M,\mathscr{D}) + d(M,\mathscr{D}') = a$. La formule de la distance d'un point à une droite s'écrit
  $$\frac{|y-mx|}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{|y+mx|}{\sqrt{1+m^2}} = a \tag{1}$$
  Étudions les différents cas :

  ⋆ Lorsque $y - mx \geqslant 0$ et $y + mx \geqslant 0$, (1) s'écrit

Exercice 2

Hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = a^2$.

Exercice 3

Astroïde $x = \cos^3 t$ et $y = \sin^3 t$.

Exercice 4 (PT 2012, B)

1) La droite Δ_1 passe par $A(0,0,1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc pour paramétrage

$$\boxed{\Delta_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t \\ y &=& t \\ z &=& 1+t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}}$$

2) Le point M_1 a donc pour coordonnées $(a,a,a+1)$ et le point M_2 $(b,0,0)$. De même que précédemment,

$$\boxed{(M_1M_2) : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& (a-b)t+b \\ y &=& at \\ z &=& (a+1)t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}}$$

3) $M \in (M_1M_2) \cap \Delta_3$ si et seulement si M a pour coordonnées $((a-b)t+b, at, (a+1)t)$ et vérifie $x_M + y_M = y_M + z_M = 0$ c'est-à-dire

$$(2a-b)t+b=0 \qquad \text{et} \qquad (2a+1)t+1=0$$

Ce système a une solution seulement si $(2a-b) - 52a+1)b = 0$, c'est-à-dire $a - b - ab = 0$.

Lorsque $b=1$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{rcl} (2a-1)t+1 & = & 0 \\ (2a+1)t+1 & = & 0 \end{array}\right.$ qui n'a pas de solutions.

Lorsque $b \neq 1$, la condition sur a et b s'écrit $a = \dfrac{b}{1-b}$

Conclusion : $\boxed{\text{Les droites } (M_1M_2) \text{ et } \Delta_3 \text{ se rencontrent si et seulement si } a = \dfrac{b}{1-b} \text{ et } b \neq 1}$

4) On suppose donc $b \neq 1$ et $a = \dfrac{b}{1-b}$. Le système trouvé en 2) s'écrit : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & (\dfrac{b}{1-b} - b)t + b \\ y & = & \dfrac{b}{1-b}t \\ z & = & (\dfrac{b}{1-b}+1)t \end{array}\right.$.

Après remplacement de t par $t/(1-b)$, ce système s'écrit

$$\boxed{(M_1M_2) : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & tb^2+b \\ y & = & tb \\ z & = & t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}}$$

5) Les droites Δ' qui coupent les droites Δ_1 et Δ_2 sont les droites $\Delta' = (M_1M_2)$ précédentes. Ces droites (M_1M_2) coupent aussi Δ_3 si et seulement si $b \neq 1$ et $a = b/(1-b)$, et la droite Δ' a alors pour équation paramétrique :

$$\Delta' = (M_1M_2) : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & tb^2+b \\ y & = & tb \\ z & = & t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

Vérifions qu'elle est incluse dans la surface :

$$xz - y^2 - y = (tb^2+b)t - (tb)^2 - tb = 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{Les droites } \Delta' \text{ qui rencontrent } \Delta_1, \Delta_2 \text{ et } \Delta_3 \text{ sont incluses dans la surface } Q.}$

6) Vérifions que les droite Δ_4 et Δ_5 ne sont ni parallèles ni sécantes :

Δ_4 a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et Δ_5 a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Or $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \star \\ \star \end{pmatrix} \neq 0$ donc les deux droites ne sont pas parallèles.

De plus $M \in \Delta_4 \cap \Delta_5$ si et seulement si $x = y = z$ et $\left\{\begin{array}{l} x - x = 2 \\ x - 2x = 1 \end{array}\right.$, ce qui est impossible : $\Delta_4 \cap \Delta_5 = \emptyset$.

Conclusion : $\boxed{\text{Les droites } \Delta_4 \text{ et } \Delta_5 \text{ ne sont pas coplanaires.}}$

7) Le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs des deux droites, c'est donc un vecteur directeur de la perpendiculaire commune $\mathscr{D}$.

On cherche deux plans (qui nous donneront les deux équations cartésiennes) contenant la droite $\mathscr{D}$.

Ces plans, par exemple, contiennent Δ_i et la direction $\overrightarrow{u}$ de la droite $\mathscr{D}$ (notons les $\mathscr{P}_i$).

Ainsi $\mathscr{P}_4 \cap \mathscr{P}_5$ contiendra un point de Δ_4 et un point de Δ_5 (car Δ_4 et Δ_5 non parallèles), et contiendra la direction $\overrightarrow{u}$: ce sera la droite $\mathscr{D}$ cherchée.

Équation de $\mathscr{P}_4$: une équation cartésienne sera de la forme $a(x-z-2)+b(y-2z-1)=0$, c'est-à-dire

$$ax + by - (a+2b)z = 2a + b$$

avec $(a,b) \neq (0,0)$.

$\mathscr{P}_4$ contient la direction $\overrightarrow{u}$ si et seulement si un vecteur normal $\overrightarrow{n}_{\mathscr{P}_4}$ à $\mathscr{P}_4$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$, i.e.

$$\overrightarrow{n}_{\mathscr{P}_4}.\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -(a+2b) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a + a + 2b = 0$$

Choisissons par exemple $a = 1$ et $b = -1$. L'équation précédente de $\mathscr{P}_4$ devient alors

$$\mathscr{P}_4 : \qquad x - y + z = 1$$

De même pour $\mathscr{P}_5$: il aura pour équation $ax+by-(a+b)z=0$, et $\overrightarrow{n}_{\mathscr{P}_5}.\overrightarrow{u} = 0$ nous donne $2a+b=0$, par exemple $a = 1$ et $b = -2$. Finalement

$$\mathscr{P}_5 : \qquad x - 2y + z = 0$$

En conclusion, un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune $\mathscr{D}$ aux droites Δ_4 et Δ_5 est

$$\boxed{\mathscr{D} : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}}$$

8) *On sait que l'on va obtenir un hyperboloïde de révolution à une nappe, d'axe Δ_5.*

a) Un cercle dont le centre est sur Δ_5 peut se voir comme l'intersection d'une sphère de centre un point (pas forcément le même) de Δ_5 et d'un plan perpendiculaire à Δ_5.

Comme Δ_5 passe par l'origine, on peut regarder les sphères centrées en l'origine (d'équations $x^2+y^2+z^2=R^2$), et les plans auront pour équation $x+y+z=d$.

De plus ces cercles doivent croiser Δ_4 : il doit y avoir au moins une solution au système :

$$M(x,y,z) \in S \cap \Delta_4 \iff \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 & \text{(sphère)} \\ x+y+z = d & \text{(plan perpendiculaire à } \Delta_5) \\ x - y = 0 & (M \in \Delta_4) \\ x - z = 0 & (M \in \Delta_4) \end{cases}$$

Nous allons en déduire une condition liant R et d.

b)

c)

Exercice 5 (PT 2015, B)

Dans l'espace euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on condidère la surface S_1 d'équation cartésienne

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 + 2xyz + 5 = 0$$

la surface S_2 d'équation cartésienne $2x - 3y + z = 7$ et le point M_0 de coordonnées $(1,-1,2)$. On note Λ l'intersection de S_1 et S_2.

1) Vérifier que $M_0 \in \Lambda$.

2) Déterminer une équation du plan tangent à S_1 en M_0.

3) En déduire une représentation cartésienne, puis un vecteur directeur de la tangente à Λ en M_0.

4) Déterminer des symétries de S_1.