Devoir de Mathématiques numéro 6

Exercice 1

On donne dans le plan deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et une constante $a > 0$. Construire l'ensemble des points M du plan tels que $d(M, \mathscr{D}) + d(M, \mathscr{D}') = a$.

Exercice 2

Déterminer le lieu des centres des cercles tangents à (Oy) et coupant (Ox) en A et B tels que $AB = 2a$. $a > 0$ donné.

Exercice 3

Un point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1. Il se projette en P sur (Ox), en Q sur (Oy) et en N sur (PQ). Lieu de N.

Exercice 4

Dans l'espace euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, on considère les points $A(0, 0, 1)$ et $B(1, 1, 2)$. On désigne par Δ_1 la droite (AB) et

$$\Delta_2 : y = z = 0 \qquad \Delta_3 : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = -1 \end{cases} \qquad \Delta_4 : \begin{cases} x - z = 2 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \Delta_5 : x = y = z$$

1) Donner une représentation paramétrique de Δ_1.

2) On considère le point M_1 de Δ_1 d'abscisse a et le point M_2 de Δ_2 d'abscisse b.
Donner une représentation paramétrique de la droite (M_1M_2).

3) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur a et b la droite (M_1M_2) a-t-elle une intersection non vide avec Δ_3 ?

4) On suppose dans cette question que la droite (M_1M_2) a une intersection non vide avec Δ_3. Donner une représentation paramétrique de (M_1M_2), on veillera à ce que le paramètre a n'apparaisse plus.

5) Soit une droite Δ' qui rencontre les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 ; montrer qu'elle est incluse dans la surface $\mathscr{Q}$ d'équation $xz = y(y + 1)$.

6) Vérifier que les droites Δ_4 et Δ_5 ne sont pas coplanaires.

7) Donner un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune aux droites Δ_4 et Δ_5.

8) On désigne par S la surface de révolution engendrée par la rotation de la droite Δ_4 autour de la droite Δ_5.

- **a)** Donner une équation de la surface S. On écrira cette équation sous la forme $\varphi(x, y, z) = 0$.
- **b)** Les coordonnées $(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ du centre Ω de cette surface sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial d}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \dfrac{\partial d}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \dfrac{\partial d}{\partial z}(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

  Déterminer les coordonnées de Ω.
- **c)** Donner une équation réduite de la surface S dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

Exercice 5

Dans l'espace euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on condidère la surface S_1 d'équation cartésienne

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 + 2xyz + 5 = 0$$

la surface S_2 d'équation cartésienne $2x - 3y + z = 7$ et le point M_0 de coordonnées $(1, -1, 2)$. On note Λ l'intersection de S_1 et S_2.

1) Vérifier que $M_0 \in \Lambda$.

2) Déterminer une équation du plan tangent à S_1 en M_0.

3) En déduire une représentation cartésienne, puis un vecteur directeur de la tangente à Λ en M_0.

4) Déterminer des symétries de S_1.