Devoir de Mathématiques numéro 5

Correction

Exercice 1

- Partie quadratique : Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$.

  Comme $\det A = 13^2 - 5^2 > 0$, la conique est une ellipse (ou un cas dégénéré associé).

  $$\chi_A(x) = \det(xI_2 - A) = (x-13)^2 - 5^2 = (x-18)(x-8)$$

  On vérifie que $18 + 8 = 26 = \mathrm{Tr}\ A$.

  On calcule les sous-espaces propres :

  $E_{18} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ *(à détailler).*

  Posons $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *(Il faut* impérativement *normer pour les coniques)*.

  Une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée, donc $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, de norme 1 et perpendiculaire à e_1, est nécessairement un vecteur propre de A pour la valeur propre 8. Ainsi, $A = PDP^{-1} = PD^tP$ avec

  $$D = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{O}_2(\mathbb{R})$$

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vecteur colonne des coordonnées dans la base canonique et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées dans la base (e_1, e_2). La formule de changement de base s'écrit

  $$X = PX'$$

  Et le changement de coordonnées s'écrit, pour la partie quadratique,

  $$13x^2 - 10xy + 13y^2 = 18x'^2 + 8y'^2$$

- Partie linéaire : Comme $X = PX'$, on a $\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y') \end{cases}$ puis

  $$-46x + 62y = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((-46-62)x' + (-46+62)y'\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-108x' + 16y')$$

  L'équation de la conique dans le repère (O, e_1, e_2) s'écrit donc

  $$18x'^2 + 8y'^2 - \frac{108}{\sqrt{2}}x' + \frac{16}{\sqrt{2}}y' - 13 = 0$$

Or

$$\begin{aligned}
18x'^2+8y'^2-\frac{108}{\sqrt{2}}x'+\frac{16}{\sqrt{2}}y'-13 &= 18\Big(x'^2-\frac{6}{\sqrt{2}}x'\Big)+8\Big(y'^2+\frac{2}{\sqrt{2}}y'\Big)-13\\
&= 18\Big(x'-\frac{3}{\sqrt{2}}\Big)^2-\frac{9}{2}+8\Big(y'+\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2-\frac{1}{2}-13\\
&= 18\Big(x'-\frac{3}{\sqrt{2}}\Big)^2+8\Big(y'+\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2-18
\end{aligned}$$

Donc, en posant $\left\{\begin{array}{lcl} x'' & = & x'-\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ y'' & = & y'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$, c'est-à-dire en se plaçant dans le repère (Ω, e_1, e_2) avec Ω de coordonnées $(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ dans le repère précédent, l'équation de la conique s'écrit

$$18x''^2+8y''^2=18$$

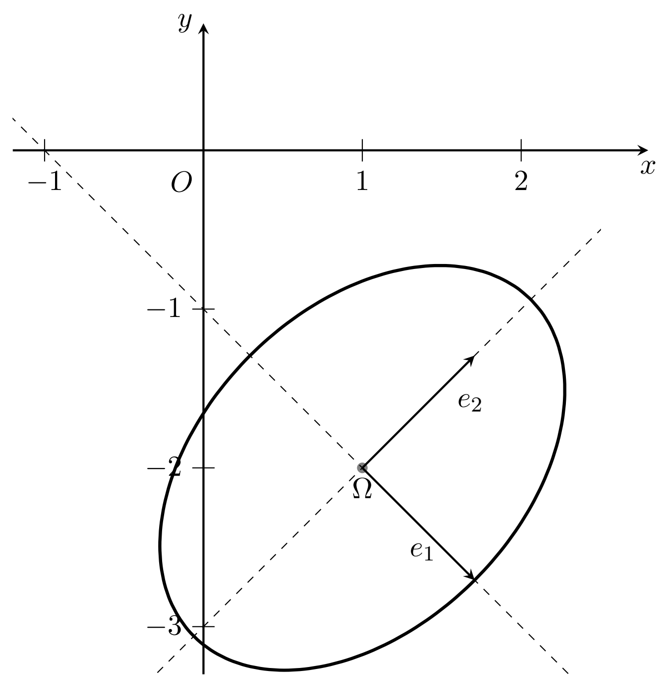
- Conclusion : En mettant l'équation sous la forme $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, il vient

$$\boxed{\frac{x''^2}{1^2}+\frac{y''^2}{(3/2)^2}=1}$$

C'est une ellipse de centre Ω, de grand axe (Ωe_2) et de demi-grand axe $3/2$, de petit axe (Ωe_1) et de demi-petit axe 1.
On veut placer Ω et les axes dans le repère de départ. Il faut donc déterminer les coordonnées de Ω dans la base de départ :

$$X_\Omega = PX'_\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{3}{\sqrt{2}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\ -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

Ainsi Ω est le point de coordonnées $(1, -2)$ dans le repère de départ.
On peut désormais tracer les axes de l'ellipse, puis l'ellipse :



Exercice 2

On munit l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $< X, Y >= {}^tXY$.

Partie 1

1) **a)** La matrice A est symétrique : ${}^tA = {}^t({}^tMM) = {}^tM^{tt}M = A$. Donc elle est diagonalisable, avec une matrice de passage orthogonale.

b) Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ,

$$\|MX\|^2 = {}^t(MX)MX = {}^tX^tMMX = {}^tX(AX) = \lambda^X X = \lambda\|X\|^2$$

Comme $\|MX\|^2$ et $\|X\|^2$ sont positifs, $\lambda \geqslant 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{Toutes les valeurs propres de } A \text{ sont positives.}}$

A est inversible : $\det A = (\det M)^2 \neq 0$. Donc $\boxed{\text{Zéro n'est pas une valeur propre de } A.}$

c) D'après 1a, il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PDP^{-1} = PD^tP$ (puisque P est orthogonale, $P^{-1} = {}^tP$).

De plus, d'après la question précédente, les coefficients diagonaux de D, qui sont les valeurs propres de A, sont strictement positifs. On peut donc les noter μ_i^2, avec $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ des réels strictement positifs.

Posons $\boxed{D' = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}, \text{ puis } S = PD'P^{-1}.}$ Alors $D'^2 = D$ donc

$$S^2 = PD'P^{-1}PD'P^{-1} = PDP^{-1} = PD'^2P^{-1} = A$$

2) Soit S la matrice construite au 1c,

$$\det S = \det P \det D' (\det P)^{-1} = \det D' \neq 0$$

Par conséquent $\boxed{S \text{ est inversible.}}$ Posons $U = MS^{-1}$. Comme S est symétrique et $A = S^2$, il vient

$${}^tUU = {}^t(MS^{-1})MS^{-1} = {}^t(S^{-1})^tMMS^{-1} = ({}^tS)^{-1}AS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$$

et $\boxed{U \text{ est orthogonale}}$. De plus, par définition de U, $M = US$, avec U orthogonale et S symétrique : $\boxed{\text{les matrices } U \text{ et } S \text{ que l'on vient de construire conviennent.}}$

Partie 2 (PT 2006, extrait)

1) $\boxed{|||I_n||| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|X\|}{\|X\|} = 1}$

2) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a $\dfrac{\|MX\|}{\|X\|} \leqslant \sup_{Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|MY\|}{\|Y\|} = |||M|||$ par définition de la borne supérieure.

En multipliant par $\|X\|$ il vient $\|MX\| \leqslant |||M|||\ \|X\|$, qui est vrai aussi en $X = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } X \in \mathbb{R}^n, \text{ on a } \|MX\| \leqslant |||M|||\ \|X\|.}$

3) Soit $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. La matrice P est en particulier inversible, donc $\boxed{\text{c'est un isomorphisme}}$.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|PX\|^2 = {}^tX^tPPX = {}^tXX = \|X\|^2$ donc

$$|||MP||| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MPX\|}{\|X\|} = \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MPX\|}{\|PX\|} = \sup_{Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MY\|}{\|Y\|} = |||M|||$$

car $X \mapsto Y = PX$ est une bijection de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

4) **a)** D diagonale donc $\boxed{De_i = \lambda_i e_i}$

b) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, comme $\lambda_i^2 \leqslant \rho(D)^2$ pour tout i,

$$\|DX\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n}(x_i De_i)\| = \|\sum_{i=1}^{n}(x_i\lambda_i e_i)\| = \sum_{i=1}^{n}(x_i\lambda_i)^2 \leqslant \rho(D)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \rho(D)^2\|X\|^2$$

Finalement, $\boxed{\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|DX\| \leqslant \rho(D)\|X\|.}$

c) Par conséquent, pour tout $X \in \mathbb{R}^n \backslash\{0\}$, $\dfrac{\|DX\|}{\|X\|} \leqslant \rho(D)$. En passant au sup, il vient $\boxed{|||D||| \leqslant \rho(D)}$.
Si i_0 est tel que $|\lambda_{i_0}| = \rho(D)$, alors d'après a) $De_{i_0} = \lambda_{i_0} e_{i_0}$.
Donc $\|De_{i_0}\| = |\lambda_{i_0}|\|e_{i_0}\| = \rho(D)\|e_{i_0}\|$. Ainsi, pour $X = e_{i_0}$, $\dfrac{\|DX\|}{\|X\|} = \rho(D)$. D'où $|||D||| \geqslant \rho(D)$.
Conclusion : $\boxed{|||D||| = \rho(D)}$

5) **a)** La matrice ${}^tMM$ est symétrique donc diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale, et par une démarche identique à celle de la question 1c de la partie 1, toute ses valeurs propres sont positives — on peut donc les écrire sous forme de carrés.

$\boxed{\text{Il existe } P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } D \text{ une matrice diagonale à coefficients positifs tels que } {}^tMM = PD^2\,{}^tP}$

b) D'après les questions 4c et 3 ([1]), la matrice ${}^tP$ étant orthogonale,

$$\rho(D) = |||D||| = |||D^tP|||$$

Or, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\|D^tPX\|^2 = {}^tXP^tDDPX = {}^tX(PD^{2t}P)X = {}^tX^tMMX = \|MX\|^2$$

Par conséquent $|||D^tP||| = |||M|||$.
Conclusion : $\boxed{|||M||| = \rho(D)}$

6) Il faut calculer $\rho(D)$, c'est-à-dire la racine carré de la plus grande valeur propre de ${}^tMM = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det({}^tMM - \lambda I_2) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}\,({}^tMM)\lambda + \det({}^tMM) = \lambda^2 - 6\lambda + 4$$

a pour racines $3 \pm \sqrt{5}$. Ainsi

$$\boxed{|||M||| = \sqrt{3+\sqrt{5}}}$$

Exercice 3 (Centrale TSI 2010 — partiel)

1) À l'intérieur de son disque de convergence $]-R, R[$, la série entière y est $\mathscr{C}^\infty$ et dérivable terme à terme. On dérive puis on remplace dans (E_a) : pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned}
(x-a)y'' + 2y' &= (x-a)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} an(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} a(n+1)na_{n+1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} \\
&= -2aa_2 + 2a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big[n(n-1)a_n - a(n+1)na_{n+1} + 2na_n\Big] x^{n-1}
\end{aligned}$$

1. On prend $P^{-1} = {}^tP$ et non P pour des raisons de changement de base : D « vit » dans la base $\mathscr{B}'$ de diagonalisation, et P prend « en entrée » du $\mathscr{B}'$, donc le produit DP n'a pas vraiment de sens vu le contexte (bien que les tailles de matrices ne posent pas problème).

Par unicité du développement en série entière, il vient donc

$$\begin{cases} -2aa_2 + 2a_1 & = & 0 \\ \forall n \geqslant 2 \quad n(n-1)a_n - a(n+1)na_{n+1} + 2na_n & = & 0 \end{cases}$$

Après simplifications, on trouve la suite géométrique $\boxed{\forall n \geqslant 1 \ a_{n+1} = \frac{a_n}{a}}$, l'expression en fonction de n étant $\forall n \geqslant 1 \ a_n = \frac{a_1}{a^{n-1}}$.

pour tout $x \in]-R, R[$, $y(x) = a_0 + a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n-1}} = a_0 - a_1 a + a_1 a \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n$.

On reconnaît la somme de la série géométrique :

$$\forall x \in]-R, R[\qquad y(x) = a_0 - a_1 a + \frac{a_1 a}{1 - x/a}$$

On a donc nécessairement $|x/a| < 1$, donc $R \leqslant a$.

2) Les fonction $y(x) = a_0 - a_1 a + \frac{a_1 a}{1 - x/a}$ sont développables en série entière sur $]-a, a[$ (car $|x/a| < 1$), et solutions de (E_a) d'après la question précédentes.

3) L'ensemble de ces fonctions peut s'écrire $\mathscr{S}_{]-a,a[} = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$ avec, pour tout $x \in]-a, a[$, $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = -a + \frac{a}{1 - x/a}$.

C'est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur $]-a, a[$. De plus la famille (f_1, f_2) est libre (f_2 n'est pas constante, donc pas colinéaire à f_1).

En conclusion, $\boxed{\mathscr{S}_{]-a,a[} \text{ est un espace vectoriel de dimension 2 de base } (f_1, f_2).}$

De plus, (E_a) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont les coefficients sont des fonctions continues, donc l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 sur chacun des intervalles $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ où le coefficient devant y'' est non nul. Ainsi,

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_a) \text{ sur }]-a, a[\text{ est } \mathscr{S}_{]-a,a[}.}$