Devoir de Mathématiques numéro 5

Exercice 1

Réduire $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 46x + 62y - 13 = 0$

Exercice 2

On munit l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $< X, Y >= {}^tXY$.

Partie 1

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe $U \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et S symétrique, tel que

$$M = US$$

1) **a)** Montrer que $A = {}^tMM$ est diagonalisable.

b) Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, calculer $\|MX\|^2$ en fonction de $\|X\|^2$ et de λ. En déduire que toutes les valeurs propres de A sont positives.
Zéro peut-il être valeur propre de A ?

c) En déduire qu'il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ des réels strictement positifs tels que

$$A = P \begin{pmatrix} \mu_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n^2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

puis que $A = S^2$, avec S une matrice symétrique que l'on précisera en fonction de P, P^{-1} et des μ_i.

2) Soit S la matrice construite au 1c, montrer que S est inversible, puis que $U = MS^{-1}$ est une matrice orthogonale. Montrer que les matrices U et S que l'on vient de construire conviennent.

Partie 2

Soit $(e_1, \ldots e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, nous posons $|||M||| = \sup\limits_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|MX\|}{\|X\|}$

1) Calculer $|||I_n|||$.

2) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $\|MX\| \leqslant |||M|||\ \|X\|$.

3) Soit $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de l'endomorphisme $X \mapsto PX$ de $\mathbb{R}^n$?
Montrer que $|||MP||| = |||M|||$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

4) Soit D une matrice diagonale de coefficients diagonaux $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On note $\rho(D) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|$.

a) Que vaut De_i ?

b) Par un calcul de $\|DX\|^2$, en déduire que, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|DX\| \leqslant \rho(D)\|X\|$.

c) En déduire que $|||D||| \leqslant \rho(D)$, puis que $|||D||| = \rho(D)$.

5) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) En s'inspirant de la question 1c de la partie 1, montrer qu'il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale à coefficients positifs tels que ${}^tMM = PD^2\,{}^tP$.

b) À l'aide des questions 3 et 4c, en déduire que $\rho(D) = |||M|||$.

6) On considère $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $|||M|||$.

Exercice 3

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, on considère

$$(E_a) \qquad (x-a)y'' + 2y' = 0$$

où y est une fonction inconnue de la variable x de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle réel et à valeur réelle.
On suppose $a > 0$. On considère une suite réelle (a_n) et on définit une fonction y comme la somme de la série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$ (avec $R > 0$).

1) On suppose que y est solution de (E_a). Déterminer, pour tout $x \in]-R, R[$, une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n), puis déterminer a_n en fonction de n et de a_1, pour tout $n \geqslant 1$. Exprimer y à l'aide de fonctions usuelles.

2) En déduire les fonctions développables en série entière qui sont solutions de (E_a) sur $]-a, a[$.

3) Montrer qu'elles forment un espace vectoriel de dimension 2 et en donner une base. En déduire l'ensemble des solutions de (E_a) sur $]-a, a[$.