Devoir de Mathématiques numéro 4

Correction

Exercice 1

- Le domaine de définition est $\mathbb{R}^*$. Il n'y a pas de symétries.

  Donc $\boxed{\text{Le domaine d'étude est } \mathbb{R}^*}$

- Variations de x et y :

$$x'(t) = 2t - \frac{2}{t^2} = 2\frac{t^3-1}{t^2} = 2\frac{(t-1)\overbrace{(t^2+t+1)}^{>0}}{t^2} \qquad \text{et} \qquad y'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2}$$

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

- Limites : (reportées dans le tableau de variations)

  En l'infini,
  $x \sim t^2$ donc $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$
  $y \sim t$ donc $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$

  En 0,
  $x \sim \dfrac{2}{t}$ donc $\lim\limits_{t\to0^-} x(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to0^+} x(t) = +\infty$
  $y \sim \dfrac{1}{t}$ donc $\lim\limits_{t\to0^-} y(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to0^+} y(t) = +\infty$

- Points singuliers : Il y a un point singulier en $t = 1$: $x'(1) = y'(1) = 0$. Soit $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

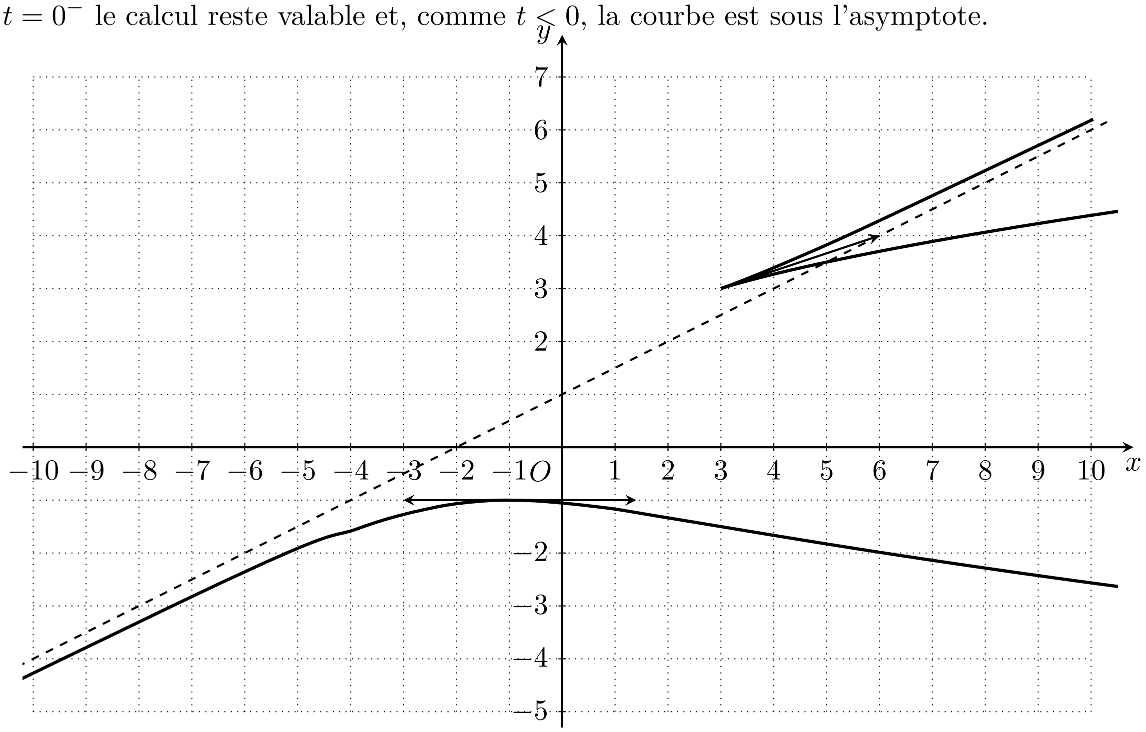
  En dérivant $f'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - 2t^{-2} \\ 1 - t^{-2} \end{pmatrix}$, on trouve $f''(t) = \begin{pmatrix} 2 + 4t^{-3} \\ 2t^{-3} \end{pmatrix}$.

  Donc en $t = 1$, il vient $f''(1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$

  Donc la tangente est portée par le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $p = 2$ donc c'est un point de rebroussement.

  De plus $f'''(t) = \begin{pmatrix} -12t^{-4} \\ -6t^{-4} \end{pmatrix}$ donc $f'''(1) = -6\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $f''(1)$ et $q = 3$: c'est un point de rebroussement de première espèce.

- <u>Branches infinies</u> : Au vu du tableau de variation, il y a 4 branches infinies, en $-\infty$, 0^-, 0^+ et $+\infty$.
  - Au voisinage de $t = 0$:
$$\frac{y}{x} \sim \frac{1/t}{2/t} = \frac{1}{2}$$
  Donc $a = \dfrac{1}{2}$. Et $y - \dfrac{1}{2}x = t + 1 + \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$.
  En conclusion : $\boxed{\text{Au voisinage de } t = 0\text{, il y a un asymptote d'équation } y = \frac{1}{2}x + 1}$
  - Au voisinage de $+\infty$:
$$\frac{y}{x} \sim \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$
  Ainsi $\boxed{\text{La courbe a une branche parabolique de direction } (Ox)}$
  - De même, au voisinage de $-\infty$, $\boxed{\text{La courbe a une branche parabolique de direction } (Ox)}$
- Tracé :
  On place les points où l'une des deux dérivées s'annule (i.e. tangente verticale ou horizontale) et la tangente associée, le point singulier et sa tangente, l'asymptote. Puis on trace en suivant le tableau de variation (en partant par exemple des points $(-1,-1)$ et $(3,3)$).
  On remarque qu'il faut étudier la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote. Au voisinage de 0^+ :
$$y - \frac{1}{2}x - 1 = t - \frac{1}{2}t^2 = t + o(t)$$
  donc la courbe est au-dessus ($t > 0$) de l'asymptote.
  Pour $t = 0^-$ le calcul reste valable et, comme $t < 0$, la courbe est sous l'asymptote.



Exercice 2 (PT B 2010 partie C / E3A PSI 2011 — Strophoïde droite)

1) a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = tx(t)$. Donc $\boxed{\text{Le paramètre } t \text{ représente la pente de la droite } (OM(t)).}$

b) Le changement de t en $-t$ change (x, y) en $(x, -y)$. Par conséquent Γ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

c) Les fonctions x et y sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, car les dénominateurs des fractions rationnelles ne s'annulent pas. On restreint l'étude à $[0, +\infty[$.

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x'(t) = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} \qquad \text{et} \qquad y'(t) = \frac{1 - 4t^2 - t^4}{(1+t^2)^2}$$

Le numérateur de $y'(t)$ est bicarré et se factorise en

$$1 - 4t^2 - t^4 = -(t^2 + 2 + \sqrt{5})(t^2 + 2 - \sqrt{5}) = -(t^2 + 2 + \sqrt{5})(t - t_0)(t + t_0)$$

où $\boxed{t_0 = \sqrt{\sqrt{5} - 2}}$. Le tableau de variation est donc le suivant :

- $x(t_0) \begin{aligned}[t] &= \dfrac{1 - (\sqrt{5} - 2)}{1 + \sqrt{5} - 2} \\ &= \dfrac{(3 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})}{5 - 1} \\ &= -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$
- $y(t_0) = t_0 x(t_0)$

t	0		t_0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$-$		$-$	
x	1	$\searrow$		$\searrow$	-1
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$y(t_0)$	$\searrow$	$-\infty$

Lorsque t tend vers $+\infty$, y tend vers $-\infty$ et x tends vers -1. C'est la seule limite infinie.
Donc $\boxed{\text{la droite d'équation } x = -1 \text{ est asymptote à } \Gamma \text{ pour } y \to \pm\infty.}$

d) Tous les points sont réguliers, donc la tangente est horizontale lorsque $y'(t) = 0$, c'est-à-dire $t = \pm t_0$, ce qui correspond au point de coordonnées $\boxed{(x(t_0), y(t_0))}$ et à son symétrique par rapport à (Ox).

De même, la tangente est verticale pour $x'(t) = 0$, c'est-à-dire $t = 0$, qui correspond à $\boxed{(1, 0)}$.

e) On cherche t_1 et t_2 tels que $t_1 \neq t_2$, $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$. Si on complète le tableau de variations de x, on constate que $x(t_1) = x(t_2)$ implique $t_2 = -t_1$ (et $t_1 \neq t_2$ équivaut à $t_1 \neq 0$). Cherchons $t_1 > 0$ tel que $y(t_1) = y(-t_1)$, c'est-à-dire

$$y(t_1) = \frac{t_1 - t_1^3}{1 + t_1^2} = \frac{-t_1 + t_1^3}{1 + t_1^2} = y(-t_1)$$

Ainsi, en résolvant, $2t_1(1 - t_1^2) = 2t_1(1 - t_1)(1 + t_1) = 0$, c'est-à-dire $t_1 = 1$.

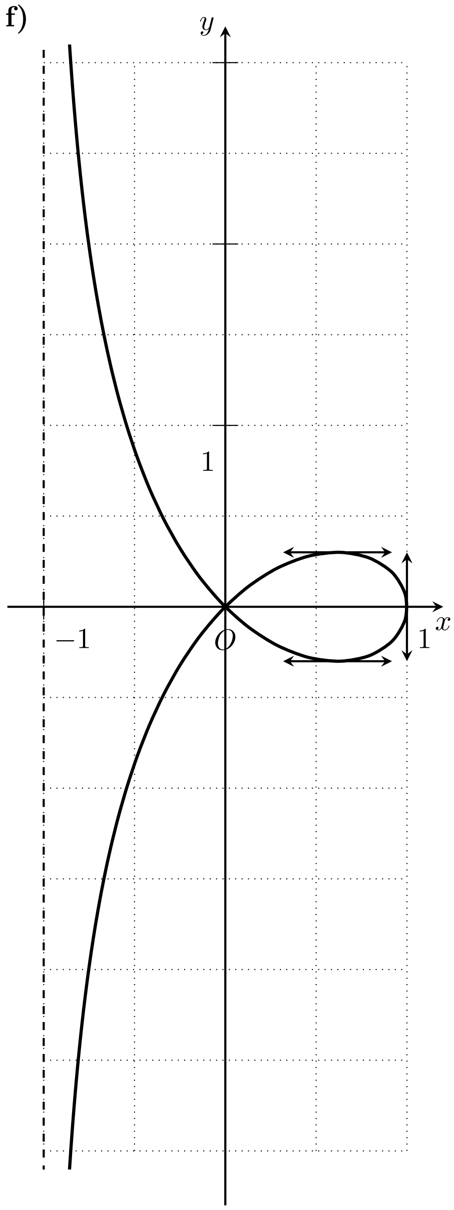
La courbe Γ possède un unique $\boxed{\text{point double en } (0, 0).}$

D'après 1)c), $\begin{cases} x'(1) = -\dfrac{4}{2^2} = -1 \\ y'(1) = \dfrac{1 - 4 - 1}{2^2} = -1 \end{cases}$ et par symétrie $\begin{cases} x'(-1) = 1 \\ y'(-1) = -1 \end{cases}$

Comme le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul, donc

$\boxed{\text{Les tangentes à } \Gamma \text{ au point double forment un angle droit.}}$

f)



2) Raisonnons par double inclusion.

Si $M(x, y) \in \Gamma$, alors $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = \dfrac{t-t^3}{1+t^2}$, donc $y = tx$. En particulier, lorsque $x \neq 0$, $t = \dfrac{y}{x}$. En remplaçant dans l'expression de x on obtient $x = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, puis en multipliant par x^2+y^2 il vient

$$(E) \qquad \boxed{x^3 + xy^2 - x^2 + y^2 = 0}$$

On avait exclu les points d'abscisse nulle, c'est-à-dire le point $(0, 0)$, or $(x, y) = (0, 0)$ vérifie bien (E). On a donc $\Gamma \subset \Gamma_{(E)}$.

Réciproquement, soit $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient (E). Pour $x \neq 0$, posons $t = \dfrac{y}{x}$.

Comme (E) équivaut à $x = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, on trouve

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad y = tx = \frac{t-t^3}{1+t^2}$$

c'est-à-dire $M \in \Gamma$. De plus $x = 0$ implique $y = 0$, d'après (E) ; qui est dans Γ (par exemple pour $t = 1$). Ainsi $\Gamma_{(E)} \subset \Gamma$.

Conclusion : par double inclusion, $(E) : x^3 + xy^2 - x^2 + y^2 = 0$ est une équation cartésienne de Γ.

(remarque : une telle équation de degré 3 définit une courbe dite cubique, qui sont des courbes fort intéressantes)

3) **a)** Les coordonnées de $M \in \Gamma$ vérifient $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = \dfrac{t-t^3}{1+t^2}$. L'équation de Δ s'écrit donc

$$u\frac{1-t^2}{1+t^2} + v\frac{t-t^3}{1+t^2} + w = 0$$

En multipliant par $-(1+t^2) \neq 0$ il vient $\boxed{vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w) = 0}$

b) On utilise les relations entre coefficients et racines. Id est, si on développe le membre de droite (avec les racines) et qu'on identifie les coefficients de chaque coté, on obtient

$$\begin{cases} v &= v & \text{(coefficient devant } t^3) \\ u-w &= -v(t_1+t_2+t_3) & \text{(coefficient devant } t^2) \\ -v &= v(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1) & \text{(coefficient devant } t^1 = t) \\ -(u+w) &= -vt_1t_2t_3 & \text{(coefficient devant } t^0 = 1) \end{cases}$$

Donc lorsque $v \neq 0$, il vient $\boxed{t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1}$

c) Trois points sont alignés si et seulement si ils sont sur une même droite, c'est-à-dire, s'ils vérifient une même équation $ux + vy + w = 0$. Supposons ces points sur Γ.

D'après le tableau de variations, la droite ne peut être verticale, donc $v \neq 0$. D'après 3)a) et 3)b), dans ce cas, $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1$.

Réciproquement, supposons que $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1 = -1$. Considérons la droite $\Delta = (M(t_1)M(t_2))$, et notons $ux + vy + w = 0$ son équation.

Par définition, $M(t_1) \in \Delta$ et $M(t_2) \in \Delta$, donc t_1 et t_2 sont des racines de l'équation trouvée au 3)a). En notant τ la troisième racine (nécessairement réelle puisque les deux précédentes le sont), le 3)b) nous dit que $t_1t_2 + t_2\tau + \tau t_1 = -1$. Par construction, $M(\tau)$ est sur $\Delta = (M(t_1)M(t_2))$.

Il nous reste à prouver que le point $M(\tau)$ est confondu avec $M(t_3)$. La différence des deux équations

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1 \qquad \text{et} \qquad t_1t_2 + t_2\tau + \tau t_1 = -1$$

nous donne $(t_3 - \tau)(t_1 + t_2) = 0$. Si $t_1 = -t_2$, alors $M(t_1)$ est le symétrique de $M(t_2)$ par rapport à (Ox), et la droite $\Delta = (M(t_1)M(t_2))$ est verticale, ce qui est exclu. Donc la seule possibilité est que $\tau = t_3$, et donc $M(t_3) \in \Delta = (M(t_1)M(t_2))$.

Conclusion : $\boxed{t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que trois points de Γ, de paramètres t_1, t_2 et t_3 soient alignés.

4) **a)** $x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = 1$ entraîne $1 - t^2 = 1 + t^2$ puis $t = 0$. Donc $\boxed{A \text{ est de paramètre } t = 0.}$

D'après 3)b), $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1$, avec $t_3 = 0$, donc $\boxed{t_1t_2 = -1}$

b) D'après 1)a), la droite (OM_1) a pour pente t_1 et la droite (OM_2) pour pente t_2. Or d'après 4)b), $t_1t_2 = -1$. Donc $\boxed{\text{les droites } (OM_1) \text{ et } (OM_2) \text{ sont perpendiculaires}}$

c) Le triangle OM_1M_2 est rectangle en O, donc O est sur le cercle de diamètre $[M_1M_2]$. Il reste à montrer que l'axe (Ox) est tangent.

Si on note Ω le centre du cercle, milieu du segment $[M_1M_2]$, l'axe (Ox) est tangent si (Ox) est perpendiculaire à (ΩO), c'est à dire si $\Omega \in (Oy)$. La condition analytique est donc $x(t_1)+x(t_2) = 0$, elle s'écrit $t_1^2t_2^2 = 1$ après calculs. Ce qui est vrai d'après 4)b).

Ainsi, $\boxed{\text{Le cercle de diamètre } [M_1M_2] \text{ est tangent à l'axe } (Ox).}$

5) **a)** La droite Δ passe par $S(t_0)$ et $M(t)$ (point double : elle y est tangente à Γ) si et seulement si $2t_0t + t^2 = -1$ (3)c)). L'équation cherchée est donc

$$\boxed{t^2 + 2t_0t + 1 = 0}$$

Cette équation a deux solutions réelles distinctes si et seulement si $\Delta = 4t_0^2 - 4 > 0$ c'est-à-dire

$$\boxed{t_0 \notin [-1, 1]}$$

Donc pour S hors de la boucle.

b) Le point $P(t)$ vérifie, d'après 3)b), $t't''+tt'+tt''=-1$. Or t' et t'' sont les racines de $t^2+2t_0t+1=0$: leur somme vaut $-2t_0$ et leur produit 1. Ainsi, en remplaçant, il vient

$$1-2t_0t=-1$$

En résolvant, on trouve $\boxed{t=1/t_0}$.

c) D'après 5)a), on vu que $t't''=1$ donc $t''=1/t'$. Ainsi $x(t'')=-x(t')$ et $y(t'')=t''x(t'')=-t''x(t')$. La droite $(M'M'')$ a pour pente $\dfrac{y(t'')-y(t')}{x(t'')-x(t')}=\dfrac{-t''-t'}{-2}=\dfrac{1}{2}(t''+t')=-t_0$ d'après les relations coefficients racines.
Or, d'après 1)a) et 5)b), la droite $(OM(t))$ a pour pente $t=1/t_0$.
Conclusion : $\boxed{\text{Les droites } (OP) \text{ et } (M'M'') \text{ sont perpendiculaires.}}$

Exercice 3 (PT 2013 B)

1) a) • Distance $\mathrm{d}(M,(OI))$: La droite (OI) est l'axe (Ox), donc

$$\boxed{\mathrm{d}(M,(OI))=|y|}$$

• Distance $\mathrm{d}(M,(OJ))$: La droite (OJ) est l'axe (Oy), donc

$$\boxed{\mathrm{d}(M,(OJ))=|x|}$$

• Distance $\mathrm{d}(M,(IJ))$: L'équation cartésienne de (IJ) est $x+y-1=0$ donc

$$\boxed{\mathrm{d}(M,(IJ))=\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}}$$

Rappelons que la distance d'un point $A(x_A,y_A)$ à une droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax+by+c=0$ est

$$\mathrm{d}(A,\mathscr{D})=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Où l'on reconnaît au dénominateur la norme du vecteur normal $\overrightarrow{n}$ qui intervient dans l'équation de $\mathscr{D}$.

b) D'après ci-dessus,

$$\begin{aligned} M\in\mathscr{C} &\iff \mathrm{d}(M,(OI))^2+\mathrm{d}(M,(OJ))^2+\mathrm{d}(M,(IJ))^2=\frac{1}{3}\\ &\iff y^2+x^2+\frac{(x+y-1)^2}{2}=\frac{1}{3}\\ &\iff 2y^2+2x^2+x^2+y^2+2xy-2x-2y+1=\frac{2}{3}\\ &\iff 3x^2+3y^2+2xy-2x-2y+\frac{1}{3}=0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Une équation cartésienne de } \mathscr{C} \text{ est } 3x^2+3y^2+2xy-2x-2y+\frac{1}{3}=0}$

c) Utilisons cette propriété *propre aux ellipses*.

• Droite (OI) : L'équation de (OI) est $y=0$ donc

$$M\in(OI)\cap\mathscr{C}\iff y=0\quad\text{et}\quad 3x^2-2x+\frac{1}{3}=0\iff y=0\quad\text{et}\quad x=\frac{1}{3}$$

Donc $(OI)\cap\mathscr{C}$ est réduite à un point, et $\boxed{\mathscr{C} \text{ est tangente à la droite } (OI)}$

- Droite (OJ) : L'équation de (OJ) est $x=0$ donc

$$M \in (OJ) \cap \mathscr{C} \iff x=0 \quad \text{et} \quad 3y^2-2y+\frac{1}{3}=0 \iff x=0 \quad \text{et} \quad y=\frac{1}{3}$$

Donc $(OJ)\cap\mathscr{C}$ est réduite à un point, et $\boxed{\mathscr{C} \text{ est tangente à la droite } (OJ)}$

On pouvait aussi remarquer, par symétrie des rôles joués par x et y, que $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à la droite $y=x$ et donc que la droite (OJ) est tangente comme conséquence du point précédent.

2) **a)** La droite (ON) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{ON}=\begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t\end{pmatrix}$.

La droite tangente en P a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta\end{pmatrix}$.

Ces deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, c'est-à-dire si leur déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} a\cos t & -a\sin\theta \\ b\sin t & b\cos\theta \end{vmatrix} = ab(\cos t\cos\theta+\sin t\sin\theta)=ab(\cos(t-\theta))$$

Comme $ab\neq 0$, l'équation s'écrit $\cos(t-\theta)=0$.

Ainsi, $\boxed{\text{La tangente à } \mathscr{E} \text{ en } P \text{ est parallèle à la droite } (ON) \text{ si et seulement si } t=\theta+\frac{\pi}{2} \mod \pi}$

b) Par définition du déterminant, $|\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})|$ est l'aire du parallélogramme défini par $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. L'aire du triangle NOP est donc donnée par la formule

$$\mathscr{A}=\left|\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP})\right| = \frac{ab}{2}|\sin(\theta-t)|$$

Or d'après ci-dessus, $t-\theta=\frac{\pi}{2} \mod \pi$, donc

$$\boxed{\mathscr{A}=\frac{ab}{2}}$$

c) La droite Δ est tangente à $\mathscr{E}$ en $M(t)$ si et seulement si le vecteur tangent $\begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t\end{pmatrix}$ à $\mathscr{E}$ en $M(t)$ est perpendiculaire au vecteur normal $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ de Δ. Ainsi, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t\end{pmatrix}=0 \\ (a\cos t, b\sin t)\in\Delta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -\alpha a\sin t+\beta b\cos t &=& 0 \\ \alpha a\cos t+\beta b\sin t &=& -\gamma \end{array}\right.$$

Puis ce système donne, en combinant les lignes,

$$\implies \left\{\begin{array}{rclll} \beta b &=& -\gamma\sin t & (1)\times\cos t & +(2)\times\sin t \\ \alpha a &=& -\gamma\cos t & (1)\times(-\sin t) & +(2)\times\cos t \end{array}\right.$$

Si $\gamma=0$, on trouve $\alpha=\beta=0$ et Δ n'est pas une droite. Donc $\boxed{\gamma\neq 0}$.

On en déduit $\cos t=-\frac{\alpha a}{\gamma}$ et $\sin t=-\frac{\beta b}{\gamma}$.

En injectant dans $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ il vient finalement

$$\boxed{a^2\alpha^2+b^2\beta^2-\gamma^2=0}$$

Réciproquement, si $a^2\alpha^2+b^2\beta^2-\gamma^2=0$ et $\gamma\neq 0$, on pose $t\in\mathbb{R}$ tel que

$$\cos t=-\frac{\alpha a}{\gamma} \qquad \text{et} \qquad \sin t=-\frac{\beta b}{\gamma}$$

D'après les calculs ci-dessus, Δ est tangente à $\mathscr{E}$ en $M(t)$.

Conclusion : $\boxed{\Delta \text{ est tangente à } \mathscr{E} \text{ si et seulement si } a^2\alpha^2+b^2\beta^2-\gamma^2=0 \quad \text{et} \quad \gamma\neq 0}$

d) Déterminons une équation cartésienne $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ de la droite $\Delta = (UV)$.

$$M(x,y) \in (UV) \iff \det(\overrightarrow{UM}, \overrightarrow{UV}) = 0$$

Or

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{UM}, \overrightarrow{UV}) &= \begin{vmatrix} x - 2a\cos u & 2a(\cos v - \cos u) \\ y - 2b\sin u & 2b(\sin v - \sin u) \end{vmatrix} \\
&= 2b(x - 2a\cos u)(\sin v - \sin u) - 2a(y - 2b\sin u)(\cos v - \cos u) \\
&= 2b(\sin v - \sin u)x - 2a(\cos v - \cos u)y \\
&\quad +4ab(-\cos u \sin v + \cos u \sin u + \sin u \cos v - \sin u \cos u) \\
&= 2b(\sin v - \sin u)x - 2a(\cos v - \cos u)y + 4ab\sin(u - v)
\end{aligned}$$

Donc $\Delta = (UV)$ a pour équation $2b(\sin v - \sin u)x - 2a(\cos v - \cos u)y + 4ab\sin(u-v)$.
D'après c), Δ est tangente à $\mathscr{E}$ si et seulement si $a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - \gamma^2 = 0$ et $\gamma \neq 0$ c'est-à-dire

$$4a^2b^2(\sin v - \sin u)^2 + 4a^2b^2(\cos v - \cos u)^2 - 16a^2b^2\sin^2(u-v) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(u-v) \neq 0$$

Comme $U \neq V$, $u - v \neq 0$ et $\sin(u-v) \neq 0$. Après simplifications, la première équation s'écrit

$$2 - 2\sin u \sin v - 2\cos u \cos v - 4\sin^2(u-v) = 0$$

Puis, comme $1 - 1\sin u \sin v - 1\cos u\cos v - 2\sin^2(u-v) = 2\cos^2(u-v) - \cos(u-v) - 1$, On résout

$$2X^2 - X - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad X = \cos(u-v)$$

dont les solutions (évidentes) sont $X = 1$ et $X = -\dfrac{1}{2}$.
Or $X = 1$ signifie $u - v = 0 \mod 2\pi$, ce qui est exclu car $U \neq V$.
Donc (UV) est tangente à $\mathscr{E}$ si et seulement si $\cos(u-v) = -\dfrac{1}{2}$.

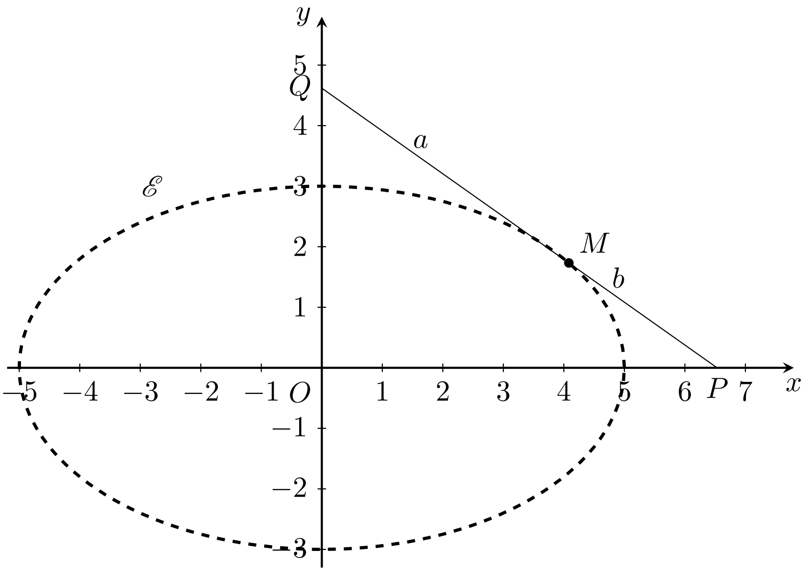
En conclusion : $\boxed{\text{La droite } (UV) \text{ est tangente à } \mathscr{E} \text{ si et seulement si } u - v = \pm\dfrac{2\pi}{3} \mod 2\pi}$

e) On suppose, quitte à renommer les points, que A, B et C sont rangés dans le sens trigonométrique sur l'ellipse $\mathscr{E}'$. Notons u un paramètre du point $A \in \mathscr{E}'$: $A(2a\cos u, 2b\sin u)$.
D'après 2)d), B admet pour paramètre $u_B = u + \dfrac{2\pi}{3}$ et C admet pour paramètre $u_C = u - \dfrac{2\pi}{3}$.
Comme $u_B - u_C = \dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3} \mod 2\pi$, d'après 2)d), $\boxed{\text{La droite } (BC) \text{ est tangente à } \mathscr{E}}$

3) **a)** Une affinité orthogonale de base $\mathscr{D} = \text{Vect}\,(\overrightarrow{e}_1)$ et de rapport k est la transformation f linéaire qui se comporte comme l'identité sur $\mathscr{D}$ effectue une homothétie de rapport k selon $\mathscr{D}^\perp$. Dans une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2 = \mathscr{D} \oplus \mathscr{D}^\perp$, elle a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

b) Traçons aussi l'ellipse, sinon le dessin présente peu d'intérêt...



c) $\boxed{\text{Le point } M \text{ décrit l'ellipse } \mathscr{E}}$

Par symétries d'axes (Ox) et (Oy), on peut restreindre le domaine d'étude au quart de plan $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

Soit $P(x_P, 0)$, $Q(0, y_Q)$ et $M(x, y)$. Le théorème de Thalès s'écrit

$$x = \frac{a}{a+b} x_P \qquad \text{et} \qquad y = \frac{b}{a+b} y_Q$$

Pythagore nous donne de plus $x_P^2 + y_Q^2 = (a+b)^2$, d'où

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x_P^2}{(a+b)^2} + \frac{y_P^2}{(a+b)^2} = 1$$

Donc $M \in \mathscr{E}$.

Réciproquement, pour un point $M(x, y) \in \mathscr{E}$ on pose $P(x_P, 0)$ et $Q(0, y_Q)$ tels que le théorème de Thalès soit vérifié.

En conclusion : l'ensemble des points M construit est exactement l'ellipse $\mathscr{E}$.