Devoir de Mathématiques numéro 4

Exercice 1

Étude complète de la courbe Γ ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y(t) = t + 1 + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

Exercice 2 (Strophoïde droite)

Le plan euclidien étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe Γ dont les équations paramétriques sont

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{t-t^3}{1+t^2}$$

1) Étude et tracé de Γ.

a) Donner une interprétation géométrique du paramètre réel t.

b) Montrer que Γ possède un axe de symétrie que l'on précisera.

c) Dresser le tableau des variations des fonctions x et y. Préciser les asymptotes éventuelles.

d) Calculer les coordonnées des points où la tangente à Γ est verticale ou horizontale.

e) Montrer que Γ possède un point double que l'on précisera (c'est-à-dire un point du plan correspondant à deux valeurs du paramètre t). Préciser l'angle entre les tangentes au point double.

f) Tracer Γ.

2) Former une équation cartésienne de Γ. (Indication : *On pourra utiliser 1)a) pour exprimer t en fonction de x et y.*)

3) On considère la droite Δ d'équation $ux + vy + w = 0$.

a) Montrer que le point $M \in \Gamma$ de paramètre t appartient à Δ si et seulement si

$$vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w) = 0$$

b) En notant t_1, t_2 et t_3 les racines de cette équation et en utilisant

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w) = v(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)$$

donner la valeur de $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1$.

On admet que c'est une condition nécessaire et suffisante pour que trois points de Γ, de paramètres t_1, t_2 et t_3 soient alignés.

4) Soit le point $A(1, 0)$ de Γ. Une droite issue de A recoupe Γ en deux points M_1 et M_2 de paramètres respectifs t_1 et t_2.

a) Donner le paramètre du point A et la relation que vérifient t_1 et t_2.

b) Que peut-on dire des droites (OM_1) et (OM_2) ?

c) Montrer que le cercle de diamètre $[M_1M_2]$ est tangent à l'axe Ox.

5) Soit S un point de paramètre t_0.

a) Quelle est l'équation qui donne les paramètres des points de contact M' et M'' des tangentes à Γ issues de S ? À quelle condition sur t_0 ces points existent-ils ?

b) La droite $(M'M'')$ recoupe Γ au point P. Quelle est, en fonction de t_0, le paramètre du point P ?

c) Que peut-on dire des droites (OP) et $(M'M'')$?

Exercice 3

1) Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère les points $I(1,0)$ et $J(0,1)$.

a) Soit $M(x,y)$ un point du plan. Donner l'expression de la distance $d(M,(OI))$ du point M à la droite (OI), puis de la distance $d(M,(OJ))$, et enfin de la distance $d(M,(IJ))$.

Dans ce qui suit, on désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que la somme des carrés des distances du point M aux trois côtés du triangle OIJ soit égale à $\frac{1}{3}$.

b) Former une équation cartésienne de $\mathscr{C}$. On admet que $\mathscr{C}$ est une ellipse.

c) Montrer que $\mathscr{C}$ est tangente aux droites (OI) et (OJ). <u>Indication</u> : *On pourra regarder l'intersection de la courbe avec chacune des droites. Si celle-ci est réduite à un point, alors la droite est tangente (propriété des ellipses, héritée des cercles).*

2) On considère les ellipses $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ d'équations respectives

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$$

où a et b désignent deux réels strictement positifs.

On considère la représentation paramétrique de $\mathscr{E}$:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

et les points N et P de paramètres respectifs t et θ.

a) Déterminer une relation entre t et θ exprimant que la tangente à $\mathscr{E}$ en P est parallèle à la droite (ON).

b) La condition précédente étant vérifiée, déterminer l'aire du triangle NOP.

c) On considère la droite Δ d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Montrer que Δ est tangente à $\mathscr{E}$ si et seulement si

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - \gamma^2 = 0 \quad \text{et} \quad \gamma \neq 0$$

d) On désigne par u et v deux réels, soient $U(2a\cos u, 2b\sin u)$ et $V(2a\cos v, 2b\sin v)$ deux points distincts de l'ellipse $\mathscr{E}'$.

Déterminer la relation que doivent vérifier u et v pour que la droite (UV) soit tangente à l'ellipse $\mathscr{E}$.

e) Soient A, B et C trois points distincts de $\mathscr{E}'$ tels que (AB) et (AC) soient tangentes à $\mathscr{E}$.

Montrer que (BC) est tangente à $\mathscr{E}$.

3) Les points P et Q décrivent respectivement l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées tout en vérifiant l'égalité $PQ = a + b$, on considère le point M du segment $[PQ]$ tel que $MP = b$ et $MQ = a$.

a) Rappeler la définition d'une affinité orthogonale. *(complètement hors programme mais tel quel dans le sujet...)*

b) Dans le cas où $a = 5$ et $b = 3$ représenter sur une figure les points M, P et Q (l'unité de longeur est 1 cm).

c) Quel est l'ensemble du plan décrit par le point M ?