

Devoir de Mathématiques numéro 3

Correction

Exercice 1 (EDHEC, ECE 2016)

1) $A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} - 4A = 4I_3$

Par conséquent $\boxed{\text{Le polynôme } P = X^2 - 4X - 4 \text{ vérifie } P(A) = 0}$

2) D'après 1), $A^2 - 4A = -4I_3$ donc

$$(-\frac{1}{4}A + I_3)A = A(-\frac{1}{4}A + I_3) = I_3$$

Donc $\boxed{A \text{ est inversible d'inverse } -\frac{1}{4}A + I_3}$

3) Division euclidienne : il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$X^n = PQ + R \qquad \text{avec} \qquad \deg R < \deg P \tag{1}$$

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}[X]$ qui conviennent. Comme $\deg R \leqslant 1$,

$$R = aX + b$$

Comme $P = (X-2)^2$, $\lambda = 2$ est racine double de P. Ainsi

$$P(2) = 0 \qquad \text{et} \qquad P'(2) = 0$$

Si on dérive l'égalité (1), il vient $nX^{n-1} = P'Q + PQ' + R'$, puis en évaluant (1) et cette nouvelle équation en $X = 2$,

$$\begin{cases} 2^n = P(2)Q(2) + R(2) = R(2) = 2a + b \\ n2^{n-1} = P'(2)Q(2) + P(2)Q'(2) + R'(2) = R'(2) = a \end{cases}$$

En résolvant ce système, il vient $a = n2^{n-1}$ et $b = (1-n)2^n$, donc

$$\boxed{R = n2^{n-1}X + (1-n)2^n}$$

Cette méthode est très générale : lorsque vous avez P tel que $P(A) = 0$, vous cherchez ses racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. En effectuant la division euclidienne $X^n = PQ + R$ puis en évaluant en $X = \lambda_i$ (quitte à dériver en cas de racines multiples) on trouve le bon nombre d'équations pour déterminer les coefficients de R.

4) En évaluant (1) en $X = A$, il vient, comme $P(A) = 0$,

$$\boxed{A^n = P(A)Q(A) + R(A) = 0 + R(A) = n2^{n-1}A + (1-n)2^n I_3}$$

On vérifie que cette formule est vraie en $n = 0$. *Vérification : toujours penser à tester (au brouillon) pour $n = 0$ et $n = 1$.*

Là aussi, la méthode est généralisable. Attention, les seules racines de P sont des réels ou des complexes.

5) D'après 2), $A^{-1} = -2^{-2}A + I_3 = (-1)2^{-1-1}A + (1-(-1))2^{-1}I_3$. Donc la formule précédente reste valable pour $n = -1$.
On montre par récurrence sur n que $A^{-n} = (-n)2^{-n-1}A + (1+n)2^{-n}I_3$ (à faire).
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad A^n = n2^{n-1}A + (1-n)2^n I_3}$

Exercice 2 (HEC, B/L 2016)

1) **a)** Si f est bijectif, alors f est injectif et surjectif, c'est-à-dire $\text{Ker } f = \{0\}$ et $\text{Im } f = E$. Donc

$$\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$$

Ainsi $\boxed{p_0 = 1}$

b) Montrons que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ en faisant les calculs dans une bonne base.
Comme f n'est pas bijectif, $E_0 = \text{Ker}\,(0\,\text{id}_E - f) = \text{Ker } f \neq \{0\}$: 0 est valeur propre de f.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres, avec e_i correspondant à la valeur propre $\lambda = \lambda_i$. On impose de plus que $(e_1, \ldots, e_k)$ soient les vecteurs propres correspondant à la valeur propre $\lambda = 0$, et que les λ_i suivant soient non nuls.

Soit $x \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ son vecteur colonne des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. On a

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i = \sum_{i=k+1}^{n} x_i \lambda_i e_i$$

Ou, matriciellement dans la base $\mathscr{B}$, si $y = f(x)$,

$$Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{k+1} x_{k+1} \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

On notera $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ celui de x'.

$$\begin{aligned}
x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f &\implies f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \exists x' \in E,\ x = f(x') \\
&\implies \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{k+1} x_{k+1} \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \exists x' \in E, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{k+1} x'_{k+1} \\ \vdots \\ \lambda_n x'_n \end{pmatrix} \\
&\implies \forall i \in [\![k+1, n]\!], \lambda_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, k]\!], x_i = 0 \\
&\implies \forall i, x_i = 0 \\
&\implies x = 0
\end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E$.
Conclusion : $\boxed{\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E}$
Ainsi, $\boxed{p_0 = 1}$

2) Soit f un endomorphisme de E vérifiant la relation $f \circ (f - \mathrm{id}_E)^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

a) f et id_E commutent donc on peut appliquer la formule du binôme pour $n = 2$,

$$(f - \mathrm{id}_E)^2 + f \circ (2\,\mathrm{id}_E - f) = f^2 - 2f \circ \mathrm{id}_E + \mathrm{id}_E^2 + 2f - f^2 = \mathrm{id}_E$$

b) Soit $x \in E$. D'après ci-dessus,

$$x = (f - \mathrm{id}_E)^2(x) + f\Big((2\,\mathrm{id}_E - f)(x)\Big) = x_1 + x_2$$

avec $x_2 = f\Big((2\,\mathrm{id}_E - f)(x)\Big) = f(x') \in \mathrm{Im}\ f$
et $x_1 = (f - \mathrm{id}_E)^2(x) \in \mathrm{Ker}\ f$ car $f(x_1) = f \circ (f - \mathrm{id}_E)^2(x) = 0$.
Donc $E = \mathrm{Ker}\ f + \mathrm{Im}\ f$.
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\ f + \dim \mathrm{Im}\ f = \dim E$.
Conclusion : $\boxed{\mathrm{Ker}\ f \oplus \mathrm{Im}\ f = E}$
Ainsi, $\boxed{p_0 = 1}$

3) Montrons que $\mathrm{Ker}\ f \cap \mathrm{Im}\ f = \{0\}$. Par hypothèse, $f = -\sum_{i=2} \frac{a_i}{a_1} f^i$.

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{Ker}\ f \cap \mathrm{Im}\ f &\implies f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \exists x' \in E,\ x = f(x') \\
&\implies \exists x' \in E,\ f^2(x') = 0 \quad \text{et} \quad x = f(x') = -\sum_{i=2} \frac{a_i}{a_1} f^i(x') = 0 \qquad (\text{car } i \geqslant 2) \\
&\implies x = 0
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}\ f \cap \mathrm{Im}\ f = \{0\}$.
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\ f + \dim \mathrm{Im}\ f = \dim E$.
Conclusion : $\boxed{\mathrm{Ker}\ f \oplus \mathrm{Im}\ f = E}$

4) <u>Ker A</u> :

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\ A &\iff AX = 0 \\
&\iff \begin{cases} x_2 &= 0 \\ x_1 - x_4 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}\ A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

<u>Im A</u> : D'après le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Im}\ A = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker}\ A = 4 - 2 = 2$$

De plus, Im A est engendré par les vecteurs colonnes :

$$\text{Im } A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$$

Comme $\dim \text{Im } A = 2$, il suffit de prendre 2 vecteurs colonnes non colinéaires (i.e. libres), par exemple les deux premiers :

$$\boxed{\text{Im } A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)}$$

Les techniques pour déterminer Ker A *et* Im A *doivent être parfaitement maîtrisées.*

Ainsi, $e_3 \in \text{Ker } f$ et $e_3 \in \text{Im } f$, donc

$$\boxed{\text{Im } f \cap \text{Ker } f \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^3 = 0$$

On lit immédiatement $\text{Ker } f^2 = \text{Vect}(e_1, e_3, e_4)$ et $\text{Im } f^2 = \text{Vect}(e_3)$ donc $\text{Ker } f^2 \cap \text{Im } f^2 \neq \{0\}$.
Mais $\text{Ker } f^3 = E$ et $\text{Im } f^3 = \{0\}$. Donc $\text{Ker } f^3 \oplus \text{Im } f^3 = \mathbb{R}^4$
Ainsi, $\boxed{p = 3}$ est le plus petit des entiers p pour lesquels on a $\text{Ker } f^p \oplus \text{Im } f^p = \mathbb{R}^4$

5) **a)** Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } f^k &\implies f^k(x) = 0 \\ &\implies f^{k+1}(x) = f(0) = 0 \\ &\implies x \in \text{Ker } f^{k+1} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Ker } f^k \subset \text{Ker } f^{k+1}}$

b) En passant aux dimension, l'inclusion précédente nous donne

$$\boxed{\dim \text{Ker } f^k \leqslant \dim \text{Ker } f^{k+1}}$$

c) Supposons que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\text{Ker } f^m \neq \text{Ker } f^{m+1}$, c'est-à-dire que l'inclusion est stricte, et donc que la suite d'entiers $(\dim \text{Ker } f^k)_k$ est strictement décroissante. Comme l'inégalité stricte entraîne

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad (\dim \text{Ker } f^k) + 1 \leqslant \dim \text{Ker } f^{k+1}$$

Par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad k = (\dim \text{Ker } f^0) + k \leqslant \dim \text{Ker } f^k$$

Ce qui entraîne en particulier $\dim \text{Ker } f^{n+1} \geqslant n + 1 > \dim E$, ce qui est absurde.

En conclusion, $\boxed{\text{Il existe un entier naturel } m \text{ pour lequel } \text{Ker } f^m = \text{Ker } f^{m+1}}$

d) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad \text{Ker } f^{p_0} = \text{Ker } f^{p_0+k}$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie.

- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie.

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } f^{p_0+k+1} & \Longrightarrow f^{p_0+k+1}(x) = f^{p_0+1}(f^k(x)) = 0 \\ & \Longrightarrow f^k(x) \in \text{Ker } f^{p_0+1} = \text{Ker } f^{p_0} \\ & \Longrightarrow f^{p_0}(f^k(x)) = f^{p_0+k}(x) = 0 \\ & \Longrightarrow x \in \text{Ker } f^{p_0+k} \end{aligned}$$

Donc Ker $f^{p_0+k+1} \subset$ Ker f^{p_0+k}. Or, d'après 5)a), Ker $f^{p_0+k} \subset$ Ker f^{p_0+k+1}. D'où l'égalité. En appliquant $\mathcal{H}_k$ il vient

$$\text{Ker } f^{p_0+k+1} = \text{Ker } f^{p_0+k} = \text{Ker } f^{p_0}$$

Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall k \geqslant 0 \qquad \text{Ker } f^{p_0} = \text{Ker } f^{p_0+k}}$

e) Soit $x \in$ Im f^{p_0} et $x' \in E$ tel que $x = f^{p_0}(x')$.

$$\begin{aligned} x \in \text{Im } f^{p_0} \cap \text{Ker } f^{p_0} & \Longrightarrow f^{p_0}(x) = f^{2p_0}(x') = 0 \\ & \Longrightarrow x' \in \text{Ker } f^{2p_0} = \text{Ker } f^{p_0} \qquad \text{(d'après d) avec } k = p_0) \\ & \Longrightarrow x = f^{p_0}(x') = 0 \end{aligned}$$

Donc Im $f^{p_0} \cap$ Ker $f^{p_0} \subset \{0_E\}$.
De plus l'intersection de deux sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel et contient donc 0_E. Finalement :

$$\boxed{\text{Im } f^{p_0} \cap \text{Ker } f^{p_0} = \{0_E\}}$$

f) D'après le théorème du rang appliqué à f^{p_0},

$$\dim \text{Im } f^{p_0} + \dim \text{Ker } f^{p_0} = \dim E$$

D'après la question précédente,

$$\text{Im } f^{p_0} \cap \text{Ker } f^{p_0} = \{0_E\}$$

Donc

$$\text{Im } f^{p_0} \oplus \text{Ker } f^{p_0} = E$$

Il reste à prouver que, si $p \in \mathbb{N}$ tel que $p < p_0$, alors Im f^p et Ker f^p ne sont pas supplémentaire dans E. Soit $p \in [\![1, p_0[\![$. Montrons que Im $f^p \cap$ Ker $f^p \neq \{0_E\}$. *Déterminer une intersection est toujours plus facile qu'une somme.*
Par construction de p_0, Ker $f^p \subsetneq$ Ker f^{p+1}. Soit $x \in$ Ker f^{p+1} mais $x \notin$ Ker f^p.
Comme $p > 1$ et $x \in$ Ker f^{p+1}, $f^p(f^p(x)) = f^{2p}(x) = 0$. Donc $f^p(x) \in$ Ker $f^p \cap$ Im f^p.
Or $x \notin$ Ker f^p, donc $f^p(x) \neq 0$. Ainsi

$$\text{Im } f^p \cap \text{Ker } f^p \neq \{0_E\}$$

Donc Im f^p et Ker f^p ne sont pas en somme directe.
Conclusion : $\boxed{\text{Cet entier } p_0 \text{ est le plus petit entier } p \text{ pour lequel Im } f^p \oplus \text{Ker } f^p = E}$

6) Soit $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice P est diagonale bloc : $P = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

Donc $P^k = \begin{pmatrix} A_1^k & 0 \\ 0 & A_2^k \end{pmatrix}$. Or, $A_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2^3 = 0$, et par récurrence, $A_1^k = kA_1$.

Par conséquent, $e_6 \notin$ Ker f^2 et $e_6 \in$ Ker f^3. Donc $p_0 \geqslant 3$.

De plus, pour tout $p \geqslant 3$, $P^p = p\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc Ker $f^p =$ Ker f^3. Ainsi, $p_0 \leqslant 3$. Donc

$$\boxed{p_0 = 3}$$

L'image étant engendré par les vecteurs colonnes,

$$imf^3 = \text{Vect}\,(e_1 + e_3) \qquad \text{et} \qquad \text{Ker } f^3 = \text{Vect}\,(e_1 - e_3, e_2, e_4, e_5, e_6)$$

Le noyau s'obtient car $f^3(x) = 0$ pour $x \in \{e_1 - e_3, e_2, e_4, e_5, e_6\}$ et égalité des dimension d'après le théorème du rang.

Ainsi, $\boxed{\text{Ker } f^3 \oplus \text{Im } f^3 = \mathbb{R}^6}$

Exercice 3 (PT 2012, A partie I et II)

Partie 1

1) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = BA$ donc $\boxed{f \text{ et } g \text{ commutent.}}$

2) • Étude de f : Le polynôme caractéristique de f est

$$\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda\,\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = -(\lambda - 1)^3$$

Donc 1 est valeur propre triple. Comme $A \neq I_3$, $\boxed{A \text{ est n'est pas diagonalisable}}$ (sinon, A serait semblable à $1 \times I_3$ et donc égal à I_3).

Par contre le polynôme caractéristique de f est *scindé*, donc $\boxed{A \text{ est trigonalisable}}$

Calcul de $E_1(f)$ *...après calculs...* $\boxed{E_1(f) = \text{Vect}\Big((1,0,0),(0,1,-1)\Big)}$.

• Étude de g : Le polynôme caractéristique de g est (opération : $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ puis $L_3 \to L_3 + L_2$).

$$\begin{aligned}\chi_g(\lambda) = \det(g - \lambda\,\text{id}_{\mathbb{R}^3}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -2+\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)\left|\begin{array}{cc|c} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 2-\lambda \end{array}\right| = -\lambda(\lambda-2)^2\end{aligned}$$

Donc les valeurs propres sont : $\begin{cases} \lambda = 0 & \text{de multiplicité} \quad \alpha = 1 \\ \lambda = 2 & \text{de multiplicité} \quad \alpha = 2 \end{cases}$.

Sous-espaces propres : *...après calculs...* $\boxed{E_0(g) = \text{Ker } g = \text{Vect}\Big((2,1,-1)\Big)}$ et $\boxed{E_2(g) = \text{Vect}\Big((0,1,-1)\Big)}$

Comme $\dim E_0(g) + \dim E_2(g) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$, $\boxed{B \text{ est n'est pas diagonalisable}}$ (on pouvait conclure dès que $\dim E_2(g) = 1 < \alpha_2 = 2$).

Par contre le polynôme caractéristique de g est *scindé*, donc $\boxed{B \text{ est trigonalisable}}$

3) Posons $e_2 = (2,1,-1)$. D'après 2), $e_2 \in E_1(f)$ et $e_2 \in E_0(g)$. Donc e_2 est stable par f et g. De plus, $e_2 \notin E_2(g)$, il ne peut donc pas être colinéaire à e_1.

4) Posons $e_3 = (0,0,1)$. Montrons que $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base : soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det P = \left|\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 \end{array}\right| = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

Donc $\mathscr{B}'$ est une base. De plus

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(e_1) & = & e_1 \\ f(e_2) & = & e_2 \end{array}\right. \text{ donc } \mathrm{Mat}\,(f,\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

(comme la matrice est triangulaire, les valeurs propres sont sur la diagonale et la dernière $*$ en bas vaut 1 : ce n'est pas demandé)

De même, $$\left\{\begin{array}{lcl} g(e_1) & = & 2e_1 \\ g(e_2) & = & 0 \end{array}\right. \text{ donc } \mathrm{Mat}\,(g,\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$ *(idem avec 2 au lieu de 1)*

Conclusion : $\boxed{\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de trigonalisation commune à } f \text{ et } g}$

Partie 2

1) Chacune des valeurs propres λ_i est de multiplicité 1. Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i est donc de dimension 1 exactement. Soit e_i une base de ce sous-espace propre.

Montrons que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre : soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i = 0$.

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i = 0\right) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i = 0$$

En combinant λ_1 fois la première équation et cette nouvelle équation, on trouve $\sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)\alpha_i e_i = 0$.

En posant $\alpha'_i = (\lambda_i - \lambda_1)\alpha_i$ pour $i \in \{2, \ldots, n\}$, qui est nul si et seulement si α_i est nul, et en poursuivant par récurrence, on obtient finalement $\alpha_n^{(n-1)} e_n = 0$.
Or $e_n \neq 0$ (vecteur propre), donc $\alpha_n^{(n-1)} = 0$.
Par récurrence, $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Donc la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.
Or $\dim \mathbb{C}^n = n = \mathrm{Card}\,((e_1, \ldots, e_n))$. Donc c'est une base :

$\boxed{\text{Il existe une base } (e_1, \ldots, e_n) \text{ de } E \text{ constituée de vecteurs propres de } f.}$

La question n'était pas clair : doit-on redémontrer le résultat du cours (ce que je ne fais pas proprement ici, cf le cours pour mieux), ou peut-on l'utiliser ? Ou utiliser la caractérisation à l'aide des dimension des sous-espace propre ?

2) **a)** Par linéarité de f, $f \circ u = f \circ \left(\sum_{i=0}^{d} a_i f^i\right) = \sum_{i=0}^{d} a_i f \circ f^i = \sum_{i=0}^{d} a_i f^{i+1}$.

Par définition de la somme et du produit par un scalaire sur les fonctions, $u \circ f = \sum_{i=0}^{d} a_i f^{i+1}$.

Donc $f \circ u = u \circ f$.
Finalement, $\boxed{f \text{ et } u \text{ commutent}}$

b) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Posons $\mathscr{B}' = (e_1, \ldots, e_n)$ la base de vecteurs propres du 1).
Comme $f(e_k) = \lambda_k e_k$, par une récurrence immédiate $f^i(e_k) = \lambda_k^i e_k$.
En combinant on trouve $u(e_k) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i(e_k) = \sum_{i=0}^{d} a_i \lambda_k^i e_k = \left(\sum_{i=0}^{d} a_i \lambda_k^i\right) e_k = P(\lambda_k) e_k$

Donc dans la base $\mathscr{B}'$ la matrice de u s'écrit $\mathrm{Mat}\,(u, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$

En conclusion, les valeurs propres de u sont les $(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$ et u est diagonalisable dans la même base $\mathscr{B}'$ que f.

3) **a)** Nous avons déjà utilisé en 1) que $\dim E_{\lambda_i} = 1$.
En effet E_{λ_i} contient au moins un vecteur non nul donc $\dim E_{\lambda_i} \geqslant 1$. De plus, $\dim E_{\lambda_i} \leqslant \alpha_i$, multiplicité de la valeur propre λ_i dans le polynôme caractéristique. Or ici, $\alpha_i = 1$.
Donc par encadrement, $\boxed{\dim E_{\lambda_i} = 1}$

b) Nous avons vu en exercice que « f et g commutent » entraîne « les sous-espaces propres de f sont stables par g (et vis versa) ». Ce n'est évidemment pas un résultat utilisable sans démonstration dans une copie. Dans le sujet de 2012, la question était posée en préliminaire, donc il suffisait de citer le résultat de cette question.

Comme f et g commutent, les sous-espaces propres de f sont stables par g (préliminaire) : pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $g(E_{\lambda_i}) \subset E_{\lambda_i}$.

En particulier, comme $E_{\lambda_i} = \mathrm{Vect}\, e_i$, $g(e_i) \in \mathrm{Vect}\,(e_i)$.

Ce qui nous donne finalement $g(e_i) = \mu_i e_i$: $\boxed{e_i \text{ est également un vecteur propre de } g}$

c) Ainsi, d'après c), la matrice de g dans $\mathscr{B}'$ est

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{\text{L'endomorphisme } g \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{B}'}$

d) Soit P le polynôme interpolateur de Lagrange qui vérifie $P(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout i :

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

Ce polynôme est bien défini car les λ_i sont deux à deux distincts par hypothèse. De plus,

$$\boxed{\deg P = n - 1}$$

Dans la base $\mathscr{B}'$, notons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ la matrice de f.

D'après 2)b), $\mathrm{Mat}\,(P(f), \mathscr{B}') = P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$ par construction de P.

Or d'après 3)c), $\mathrm{Mat}\,(g, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$. Donc $\mathrm{Mat}\,(g, \mathscr{B}') = \mathrm{Mat}\,(P(f), \mathscr{B}')$.

Par conséquent, $\boxed{g = P(f)}$.

Exercice 4 (oral ENSAM, 2013)

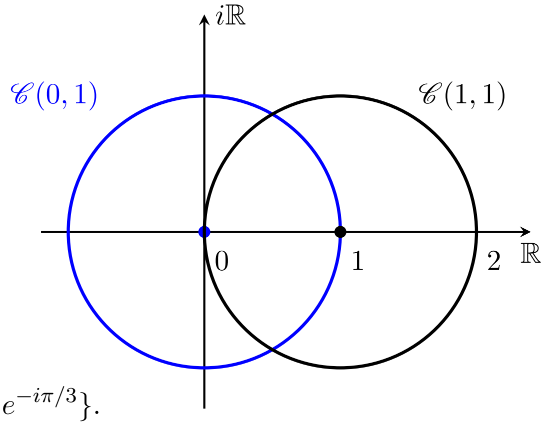
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Si $P = c$ est un polynôme constant, alors l'équation s'écrit $c = c^2$ et les seules solutions sont $c = 0$ ou $c = 1$.

Supposons désormais $\deg P \geqslant 1$.

Notons $Z(P)$ l'ensemble des racines (complexes) de P.

- Soit $\alpha \in Z(P)$. Alors $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha+1) = 0$, donc α^2 est aussi une racine de P.
  Par récurrence, α^{2^n} est une racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Or P a un nombre fini de racines. Donc les α^{2^n} ne peuvent pas être des nombres tous distincts. Une des conséquences est que $|\alpha| = 1$ ou $\alpha = 0$.
  Si on note $\mathscr{C}(0,1)$ le cercle de centre 0 et de rayon 1, $\boxed{Z(P) \subset \mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}}$



- Soit $\alpha \in Z(P)$.
  Alors $P\Big((\alpha-1)^2\Big) = P(\alpha-1)P(\alpha) = 0$, donc $(\alpha-1)^2 \in Z(P)$.
  Or $Z(P) \subset \mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}$, donc $(\alpha-1)^2 \in \mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}$,
  c'est-à-dire $|\alpha - 1| = 1$ ou $(\alpha - 1) = 0$.
  Ainsi, $\alpha \in \mathscr{C}(1,1)$ ou $\alpha = 1$.
  Par conséquent, $\boxed{Z(P) \subset \mathscr{C}(1,1) \cup \{1\}}$

- Ainsi, $\mathbb{Z}(P) \subset \Big(\mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}\Big) \cap \Big(\mathscr{C}(1,1) \cup \{1\}\Big) = \{0, 1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}$.
  Si $\alpha = e^{i\pi/3}$, $\alpha^2 = e^{2i\pi/3} \notin Z(P)$, alors que d'après le premier point $\alpha^2 \in Z(P)$. Par conséquent $e^{i\pi/3}$ est à exclure, et de même $e^{-i\pi/3}$. Il reste donc :

$$\boxed{Z(P) \subset \{0, 1\}}$$

- D'après ci-dessus, les seules racines possibles de P sont 0 et 1.
  Donc $P(X) = cX^p(X-1)^q$ avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}^*$.
  L'équation fonctionnelle s'écrit donc :

$$P(X^2) = cX^{2p}(X^2-1)^q = c^2X^p(X-1)^q(X+1)^pX^q = P(X)P(X+1)$$

  En décomposant $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, l'égalité précédente s'écrit :

$$cX^{2p}(X-1)^q(X+1)^q = c^2X^{p+q}(X-1)^q(X+1)^p$$

  En identifiant (par unicité de la décomposition en facteurs $(X-\lambda)^\alpha$), il vient $c = 1$, $2p = p+q$, $q = q$ et $q = p$. Donc $P = X^p(X-1)^p$.
  Réciproquement, $P = X^p(X-1)^p$ vérifie $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Conclusion : $\boxed{\text{Les polynômes } P \text{ vérifiant } P(X^2) = P(X)P(X+1) \text{ sont } P = 0, \text{ et } P = X^p(X-1)^p \text{ avec } p \in \mathbb{N}.}$