Devoir de Mathématiques numéro 3

Exercice 1

On désigne par id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$, et I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $A^2 - 4A$. En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.

2) La matrice A est-elle inversible ?

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixée. Effectuer la division euclidienne de X^n par P. Exprimer le fait que $x = 2$ est racine double de P. En déduire une expression du reste de la division euclidienne.

4) En déduire une expression de A^n en fonction de A, I et $n \in \mathbb{N}$.

5) Vérifier que la formule trouvée ci-dessus reste valable pour $n = -1$. En déduire la formule pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 1 et E est un espace vectoriel de dimension n. On note id_E l'endomorphisme identité de E. Si f est un endomorphisme de E, on pose $f^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout entier $m \geqslant 1$, $f^m = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ fois}}$. On note $0_{\mathscr{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E.

L'objectif de cet exercice est de montrer que, pour tout endomorphisme f non nul de E, il existe un entier naturel p non nul tel que $\mathrm{Ker}\ f^p \oplus \mathrm{Im}\ f^p = E$ et de déterminer l'entier p_0 qui est le plus petit des entiers pour lesquels cette égalité est vérifiée.

1) **a)** On suppose que f est bijectif. Déterminer p_0.

b) On suppose que f est diagonalisable et non bijectif. Montrer que $\mathrm{Ker}\ f \oplus \mathrm{Im}\ f = E$. Déterminer p_0.

2) Soit f un endomorphisme de E vérifiant la relation $f \circ (f - \mathrm{id}_E)^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

a) Calculer $(f - \mathrm{id}_E)^2 + f \circ (2\,\mathrm{id}_E - f)$. (On justifiera l'usage de l'identité remarquable).

b) En déduire que $\mathrm{Ker}\ f \oplus \mathrm{Im}\ f = E$.

3) Soit m un entier supérieur ou égal à 1. On suppose dans cette question l'existence de réels $a_1, a_2, \ldots, a_m$, avec $a_1 \neq 0$, vérifiants la relation $a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_m f^m = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que $\mathrm{Ker}\ f \oplus \mathrm{Im}\ f = E$.

4) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}^4$ et on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice A dans la base $\mathscr{B}$ est définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que $\mathrm{Im}\ f \cap \mathrm{Ker}\ f \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ Calculer A^2 et A^3. En déduire la plus petit des entiers p pour lesquels on a $\mathrm{Ker}\ f^p \oplus \mathrm{Im}\ f^p = \mathbb{R}^4$

5) Dans cette question, on revient au cas général où $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f un endomorphisme non nul de E.

a) Établir pour tout entier naturel k l'inclusion Ker $f^k \subset$ Ker f^{k+1}.

b) Comparer les dimensions respectives de Ker f^k et Ker f^{k+1}.

c) À l'aide d'une démonstration par l'absurde et en raisonnant sur les dimensions, montrer qu'il existe un entier naturel m pour lequel Ker $f^m =$ Ker f^{m+1}.

d) On note p_0 le plus petit des entiers naturels p pour lesquels Ker $f^p =$ Ker f^{p+1}. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel k, on a Ker $f^{p_0} =$ Ker f^{p_0+k}.

e) Montrer que Im $f^{p_0} \cap$ Ker $f^{p_0} = \{0_E\}$.

f) En déduire que cet entier p_0 est le plus petit entier p pour lequel Im $f^p \oplus$ Ker $f^p = E$.

6) Exemple. On suppose que $E = \mathbb{R}^6$ et que la matrice P de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^6$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note p_0 le petit des entiers naturels p tels que Ker $f^p =$ Ker f^{p+1}.
Vérifier que $p_0 = 3$ et que Ker $f^3 \oplus$ Im $f^3 = \mathbb{R}^6$.

Exercice 3

Partie 1

Soit $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f et g commutent.

2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espace propre de f et g.
Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? trigonalisables ?

3) On note e_1 un vecteur propre de g associé à la valeur propre 2. Déterminer un vecteur e_2 non colinéaire à e_1 tel que le sous-espace Vect (e_1, e_2) soit stable par f et par g.

4) Construire une base $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ de trigonalisation commune à f et g.

Partie 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$. , et soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1) Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f.

2) Soit $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$. On considère le polynôme P défini par

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$$

Soit u l'endomorphisme de E défini par

$$u = P(f) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i$$

avec $f^0 = \mathrm{id}_E$ l'application identité de E, et pour $k \geqslant 1$, $f_k = f \circ \cdots \circ f$ est la k-ième composée de f.

a) Montrer que f et u commutent.

b) Exprimer les valeurs propres de u en fonction de celles de f et montrer que u est diagonalisable dans la même base que f.

3) Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f.

a) Quelle est la dimension de E_{λ_i}, sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ?

b) En déduire que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, e_i est également un vecteur propre de g. On notera μ_i la valeur propre associée.

c) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

d) Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.
Indication : *Utiliser le polynôme interpolateur de Lagrange P qui vérifie $P(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout i.*

Exercice 4 (oral ENSAM, 2013)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
Indication : *On pourra regarder les racines de P. Si 0 et 1 sont les seules racines, comment s'écrit le polynôme P ?*