 Pour le Jeudi 26 novembre 2015

Devoir de Mathématiques numéro 3

Correction

Exercice 1

Soit p et q deux projecteurs de E.

$$(p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2 = p + q + pq + qp$$

Donc $p+q$ est un projecteur $\iff (p+q)^2 = p+q$ (par définition)
$\iff p \circ q + q \circ p = 0$ (d'après le calcul précédent).

Exemple : p un projecteur quelconque et $q = \mathrm{id}_E - p$.

Exercice 2

1) L'application $\widetilde{f}$ est bien définie : par construction $\widetilde{f}$ atterri bien dans $f(E)$.

- Linéarité : Soit x, $y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme H est un sous-espace vectoriel, $\lambda x + y \in H$, et

$$\widetilde{f}(\lambda x + y) = f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda \widetilde{f}(x) + \widetilde{f}(y)$$

  Donc $\widetilde{f}$ est linéaire.

- Injectivité : Montrons que $\mathrm{Ker}\ \widetilde{f} = \{0\}$.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}\ \widetilde{f} &\implies x \in H \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \\ &\implies x \in H \cap \mathrm{Ker}\ f \\ &\implies x = 0 \qquad \text{(car } H \text{ et Ker } f \text{ en somme directe)} \end{aligned}$$

  Donc $\mathrm{Ker}\ \widetilde{f} = \{0\}$, et $\widetilde{f}$ est injective.

- Surjectivité : Montrons que $\mathrm{Im}\ \widetilde{f} = f(E)$. *Comme $\mathrm{Im}\ \widetilde{f} = f(H)$, il faut donc montrer $f(H) = f(E)$.*
  Par construction $\mathrm{Im}\ \widetilde{f} \subset f(E)$.
  Réciproquement $y \in f(E)$ s'écrit $y = f(x)$ avec $x \in E$.
  Or $E = H \oplus \mathrm{Ker}\ f$ donc $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in H$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}\ f$.
  Ainsi $y = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + 0 = \widetilde{f}(x_1) \in \mathrm{Im}\ \widetilde{f}$.
  D'où $f(E) \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{f}$.
  Donc $\mathrm{Im}\ \widetilde{f} = f(E)$ et $\widetilde{f}$ est surjective.

Conclusion : $\boxed{\text{L'application } \widetilde{f} : H \to f(E) \text{ est un isomorphisme}}$

2)
- Par construction de H, $E = H \oplus \mathrm{Ker}\ f$. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de H, et $(e_{r+1}, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}\ f$.
  Notons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ la base de E obtenue en réunissant les deux précédentes.
- Comme $\widetilde{f}$ est un isomorphisme (question 1), l'image d'une base (de H) par $\widetilde{f}$ est une base (de $f(E)$). Notons $(e'_1, \ldots, e'_r) = (f(e_1), \ldots, f(e_r))$ (i.e. $e'_i = f(e_i)$).
  Complétons cette base de $f(E) \subset E'$ en une base de E' par le théorème de la base incomplète : $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$.

$$\begin{array}{rcll} f(e_1) & = & e'_1 = 1\times e'_1 & \\ & \vdots & & \text{(par définition de } e'_i) \\ f(e_r) & = & e'_r = 1\times e'_r & \\ f(e_{r+1}) & = & 0 & \\ & \vdots & & \text{(car } e_i \in \text{Ker } f) \\ f(e_p) & = & 0 & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

Donc $\boxed{\text{Mat}\,(f,\mathscr{B},\mathscr{B}') = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}$

Malheureusement, la plupart du temps on s'intéresse à des endomorphismes, et on veut que $\mathscr{B}' = \mathscr{B}$. Cette matrice ne nous intéresse donc pas, et il la théorie qui répond à la question — obtenir une matrice la plus sympa possible — est la théorie de la réduction des endomorphismes.

3) **a)** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'endomorphisme canoniquement associé à M, et $\mathscr{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. D'après la question 2) précédente,

- il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ (soit $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_{\text{can}}$ à $\mathscr{B}$),
- il existe une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ (soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_{\text{can}}$ à $\mathscr{B}'$),

tel que $\text{Mat}\,(f,\mathscr{B},\mathscr{B}') = J_r$.
Avec $r = \dim H = \dim E - \dim \text{Ker } f = \text{rg } f$ par le théorème du rang.
Matriciellement, on a donc

$$\boxed{M = PJ_rQ^{-1} \qquad \text{avec} \qquad J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}$$

b) Découpons par blocs les matrices P et Q^{-1}, pour pouvoir faire un produit par blocs :

$$P = \left(\begin{array}{c|c} P' & P'' \end{array}\right) \qquad \text{et} \qquad Q^{-1} = \left(\begin{array}{c} Q' \\ \hline Q'' \end{array}\right)$$

Où P' est composée des r premières colonnes et Q' des r premières lignes.
$\boxed{\text{rg}\,(P') = r = \max(r,n)}$ car l'inverse signifierait que la famille des vecteurs colonnes de P' est liée, donc que celle des vecteurs colonnes de P aussi (sur-famille), or P est inversible (donc la famille des vecteurs colonnes de P est libre).
De même, en raisonnant sur les lignes, $\boxed{\text{rg}\,(Q') = r}$
En effectuant un produit matriciel bloc, on trouve

$$M = \left(\begin{array}{c|c} P' & P'' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} Q' \\ \hline Q'' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P' & P'' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} I_rQ' + 0Q'' \\ \hline 0Q' + 0Q'' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P' & P'' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} Q' \\ \hline 0 \end{array}\right) = P'Q' + P''0 = P'Q'$$

Conclusion : $\boxed{M = P'I_rQ'}$

Exercice 3 (PT 2009, A extraits)

1) $M^2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = M$, donc $f^2 = f$. Conclusion $\boxed{f \text{ est un projecteur}}$

De plus $\text{rg}\,(f) = \text{Tr}\,(f) = \dfrac{1}{3}(1+2) = 1$.

2) Soit on calcule (rapide), soit on raisonne :

- $\text{rg}\,(f) = 1$ donc $\dim \text{Im } f = 1$ donc (on cherche 1 vecteur non nul dans l'image, ça suffira)

$$\boxed{\text{Im } f = \text{Vect}\,\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)}$$

- Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ et on voit que $M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0$ donc

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)}$$

Exercice 4

1) La famille $\mathscr{B}'$ est une base de E si et seulement si $\det(\mathscr{B}') \neq 0$. Soit $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

$$\det(\mathscr{B}') = \det P = \left|\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & -1\\ \hline 0 & 0 & 2\end{array}\right|_{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} = 2\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Conclusion : $\boxed{\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ est une base}}$

2) Comme ε_2 et $\varepsilon_3 \in \mathscr{P}$, et $\varepsilon_1 \in \mathscr{D}$, il vient

$$u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \qquad u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 \qquad u(\varepsilon_1) = 0$$

Ce qui nous donne

$$\begin{cases} u(e_1) - u(e_3) &= e_1 - e_3 \quad (1)\\ 2u(e_1) - u(e_2) &= 2e_1 - e_2 \quad (2)\\ u(e_1) + 3u(e_2) - u(e_3) &= 0 \quad (3)\end{cases}$$

Ainsi (1) – (3) nous donne $-3u(e_2) = e_1 - e_3$, et $u(e_2) = \frac{1}{3}(-e_1 + e_3)$.

Puis (2) donne $2u(e_1) = 2e_1 - e_2 + u(e_2) = \frac{5}{3}e_1 - e_2 + \frac{1}{3}e_3$, donc $u(e_1) = \frac{1}{6}(5e_1 - 6e_2 + 2e_3)$.

Finalement (3) donne $u(e_3) = u(e_1) + 3u(e_2) = \frac{1}{6}(5e_1 - 6e_2 + 2e_3) - e_1 + e_3 = \frac{1}{6}(-e_1 - 6e_2 + 8e_3)$.

Donc la matrice est

$$\boxed{M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & -2 & -1\\ -6 & 0 & -6\\ 2 & 2 & 8\end{pmatrix}}$$

Autre façon de faire, plus ou moins équivalente — seul le formalisme change : calculer M', P^{-1} puis appliquer la formule de changement de base.

3) Par définition, $u(\varepsilon_1) = 0$, $u(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3$. Donc

$$\boxed{M' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

et, d'après 1), $\boxed{P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}}$ puis $\boxed{M = PM'P^{-1}}$

Exercice 5

1)
- Im J est engendré par les vecteurs colonnes de J, donc par $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$. Posons $e_1 = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

- Ker J : $X \in \operatorname{Ker} J \iff x_1 + \cdots + x_n = 0 \iff X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)$

Posons $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cette famille est une base de Ker f.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice des vecteurs colonnes précédents.

La famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base si et seulement si $\det P \neq 0$. Le calcul s'avérant non trivial, prenons un autre angle d'approche.

Comme $J \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \neq 0$, $e_1 \notin$ Ker J. Donc, comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de Ker f, $\mathscr{B}$ est une base de Vect $(e_1) \oplus$ Ker f, et Vect $(e_1) \oplus$ Ker $f = \mathbb{R}^n$ (inclusion et égalité des dimensions).
Par conséquent $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, et si on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par J,

$$\mathrm{Mat}\,(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

La formule de changement de base, entre la base canonique et la base $\mathscr{B}$, nous donne :

$$\boxed{J = P \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}$$

2)

$$P^{-1}(\alpha I_n + \beta J)P = \alpha P^{-1}P + \beta P^{-1}JP = \alpha I_n + \beta P^{-1}JP = \begin{pmatrix} \alpha + \beta n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

D'où $\det(\alpha I_n + \beta J) = \det(P^{-1}(\alpha I_n + \beta J)P) = \begin{vmatrix} \alpha + \beta n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \boxed{(\alpha + n\beta)\alpha^{n-1}}$